МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Кафедра «Управление качеством»

Методические указания

к практическим работам
по дисциплине
«Непараметрические методы оценки качества объектов»

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2023

УДК 006.1
Составители: Сорочкина О.Ю, Русин А.П.

Методические указания к практическим работам по дисциплине «Непараметрические методы оценки качества объектов» для студентов, обучающихся по направлению «Стандартизация и метрология» / Ростов н/Д, Издательский центр ДГТУ, 2023. – 119с.

Методические указания содержат цели и задачи практических работ, общие положения, индивидуальные задания для выполнения, требования к отчёту.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 27.03.01 «Стандартизация и метрология».

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Управление качеством»
д-р техн. наук, профессор В.П. Димитров

В печать ___.___.2023 г.
Формат 60×84/16. Объем ___ усл. п. л.
Тираж ___ экз. Заказ №. ___.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

ВВЕДЕНИЕ

Конечная цель всякого исследования состоит в нахождение связей (зависимостей) между переменными. Не существует иного способа представления знания, кроме как в терминах зависимостей между количествами или качествами, выраженными какими-либо переменными. Таким образом, развитие науки всегда заключается в нахождении новых связей между переменными.

Статистиками разработано много различных мер определения взаимосвязи между переменными. Выбор определенной меры в конкретном исследовании зависит от числа переменных, используемых шкал измерения, природы зависимостей и т.д. Большинство этих мер, тем не менее, подчиняются общему принципу: они пытаются оценить наблюдаемую зависимость, сравнивая ее с априори предполагаемой зависимостью между рассматриваемыми переменными. Обычный способ выполнить такие оценки заключается в том, чтобы посмотреть, как варьируются значения переменных и затем подсчитать, какую часть всей имеющейся вариации можно объяснить наличием «общей» (совместной) вариации двух (или более) переменных. Т.е. необходимо сравнить то, что есть общего в этих переменных, с тем, что потенциально было бы у них общего, если бы переменные были абсолютно зависимы.

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметров неизвестного закона распределения. В конкретной ситуации статистическую гипотезу формулируют как предположение на определенном уровне статистической значимости о свойствах генеральной совокупности по оценкам выборки

Статистические гипотезы подразделяются на нулевую и альтернативную

Нулевая гипотеза обозначается как H_0. Это гипотеза об отсутствии различий в значениях признаков. Например, гипотеза H_0: fi_1 - fi_2 = 0 читается так:" выдвинута нулевая гипотеза об отсутствии значимой разницы между средними

fi_1 и fi_2. Как правило, нулевая гипотеза - это то, что мы хотим опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий

Альтернативная гипотеза является логическим отрицанием нулевой гипотезы и обозначается как H_1. Естественно, что это гипотеза о существования различий. Например, гипотеза H_1: $fi_1 - fi_2 \neq 0$ читается так: выдвинута альтернативная гипотеза о наличии значимой разницы между средними fi_1 и fi_2. Зачастую альтернативная гипотеза - это то, что мы хотим доказать. Однако существуют задачи, когда желательно подтвердить нулевую гипотезу и убедиться, что выборки не различаются между собой какими-то показателями.

Статистические выводы делаются на основании принятия одной гипотезы и отклонение другой. Решение принимается с определенной достоверностью

Статистический критерий - это решающее правило, обеспечивающее математически обоснованное принятие истинной и отклонение ложной гипотезы Статистические критерии строятся на основе статистики $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ - некоторой функции от результатов наблюдений $x_{1э}, x_{2э}, \ldots x_{nэ}$ Если эмпирическое значение статистики принадлежат критической области, то нулевую гипотезу отклоняют (отбрасывают), иначе - принимают Статистические критерии определяют в практической деятельности метод расчета определенного числа, которое обозначается как эмпирическое значение критериев.

Соотношение эмпирического и критического значений критерия является основанием для подтверждения или опровержения гипотезы. Правила принятия статистического решения оговариваются для каждого критерия

Согласно статистических гипотез статистические критерии делятся на параметрические и непараметрические

Параметрические критерии используются в задачах проверки параметрических гипотез и включают в свой расчет показатели распределения, например, средние, дисперсии и т.д. Это такие известные классические критерии, как критерий Стьюдента, критерий Фишера и др.

Непараметрические критерии проверки гипотез основаны на операциях с другими данными, в частности, частотами, рангами и т.п. Это критерий Вилкоксона, критерий Манна Уитни и многие другие

Параметрические критерии позволяют прямо оценить уровень основных параметров генеральных совокупностей, разности средних и различия в дисперсиях. Критерии способны выявить тенденции изменения признака, оценить взаимодействие двух и более факторов при воздействии на изменения признака. Параметрические критерии считаются несколько более мощными, чем непараметрические, при условии, что признак измерен в интервальной шкале, шкале отношений и нормально распределен. Однако, с метрологическими шкалами могут возникнуть определенные проблемы, если данные, представлены не в стандартизированных оценках. К тому же проверка распределения «на нормальность» требует достаточно сложных расчетов, результат которых заранее неизвестен. Если распределения признаков отличаются от нормального, тогда приходится обращаться к непараметрических критериям.

Непараметрические критерии лишены вышеперечисленных ограничений и могут использоваться, даже кода экспериментальные данные представлены в не метрологических шкалах. Однако они не позволяют осуществить прямую оценку уровня таких важных параметров, как среднее или дисперсия, с их помощью невозможно оценить взаимодействий действие двух и более условий или факторов, влияющих на изменение признака. Непараметрические критерии позволяют решить некоторые важные задачи, которые сопровождают исследования в гуманитарных областях, психологии и педагогике: выявление различий в уровне исследуемого признака, оценка сдвига значений исследуемого признака, выявление различий в распределениях.

Применение критериев для принятия (отклонения) статистических гипотез всегда осуществляются с доверительной вероятностью, иначе говоря, на определенном уровне значимости

Уровень статистической значимости - это вероятность того, что мы признали различия существенными (приняли альтернативную гипотезу и отклонили нулевую), а они в действительности случайные. Например, если указывается, что различия достоверны на 5%-ном уровне значимости, то подразумевается вероятность 0,05 того, что они все же недостоверные.

Исторически сложилось так, что в психолого-педагогических исследованиях принято считать 10%-й уровень статистической значимости низким, 5%-й уровень – достаточным, 1%-й уровень и выше – высоким. Потому в таблицах критических значений обычно приводятся значения критериев, соответствующих уровням статистической значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$, иногда $\alpha = 0{,}001$.

Непараметрические методы наиболее приемлемы, когда объем выборок мал. Если данных много (например, $n > 100$), то не имеет смысла использовать непараметрические статистики.

Дело в том, что когда выборки становятся очень большими, то выборочные средние подчиняются нормальному закону, даже если исходная переменная не является нормальной или измерена с погрешностью.

Непараметрические тесты имеют меньшую статистическую мощность (менее чувствительны), чем их параметрические конкуренты, и если важно обнаружить даже слабые отклонения, следует особенно внимательно выбирать статистику критерия.

Практическая работа 1

Проверка выборок на нормальность

1.1 Теоретические сведения

Закон распределения полностью характеризует случайную величину (с. в.). Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые *числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения* с.в. Такие числа принято называть *числовыми характеристиками* с. в.

Важнейшими среди них являются:

- характеристики положения, фиксирующие положение с. в. на числовой оси: математическое ожидание (центр распределения с.в.), мода, медиана;

- характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений с.в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием (или средним значением) д.с.в. X, имеющей закон распределения $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности.

Математическое ожидание *имеет ту же размерность*, что и с. в.

Модой с.в. MoX называется наиболее вероятное ее значение (то, для которого вероятность p_i или плотность распределения $f(x)$ достигает максимума).

Модой д. с. в. X называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Для н.с.в. MoX – точка максимума (локального) плотности $f(x)$.

Медиана MeX применяется, как правило, только для непрерывных с.в. и представляет собой X такое значение $x_м$, для которого

$$P\{X < x_м\} = P\{X > x_м\} = 0,5, \quad (1.1)$$

т. е. одинаково вероятно, окажется ли с. в. X меньше $x_м$ или больше $x_м$. Геометрически медиана делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части.

Дисперсией (рассеянием) с. в. *X* называется математическое ожидание (м.о.) квадрата ее отклонения от своего математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2 \tag{1.2}$$

или

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \tag{1.3}$$

т.е. дисперсия равна разности м.о. квадрата с.в. от квадрата ее м.о.

Дисперсия характеризует разброс значений с. в. относительно ее м. о. Дисперсия имеет размерность *квадрата* размерности с.в., что не всегда удобно, поэтому на практике в качестве характеристики рассеивания пользуются величиной, имеющей размерность случайной величины – *средним квадратическим отклонением (СКО)*.

Средним квадратическим отклонением или стандартным откло*нением* с. в. *X* называется положительное значение квадратного корня из ее дисперсии, обозначают через σ_x (или σ):

$$\sigma = \sqrt{DX}\,. \tag{1.4}$$

Задачей статистического анализа, решаемой после определения основных (выборочных) характеристик является анализ одной выборки на предмет соответствия заданному среднему значению и совместный анализ нескольких выборок. Важнейшим вопросом, возникающим при анализе двух выборок, является вопрос о наличии различий между ними. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних.

Если вид распределения или функция распределения выборки заданы, в этом случае задача оценки различий двух групп независимых наблюдений может решаться с использованием параметрических критериев статистики. Использование параметрических критериев статистики без предварительной проверки вида распределения может привести к определенным ошибкам в ходе проверки рабочей гипотезы.

В группу параметрических критериев методов математической статистики входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез о принадлежности двух выборок одной совокупности. Эти методы основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному (гауссовому) закону распределения. Среди параметрических критериев статистики наиболее часто применяют критерии Стьюдента и Фишера.

1.2 Методы проверки выборки на нормальность

Чтобы определить, имеем ли мы дело с нормальным распределением, можно применять следующие методы:

1.2.1 в пределах осей можно нарисовать полигон частоты (эмпирическую функцию распределения), интервальную гистограмму или кривую нормального распределения на основе данных исследования. Исследуя формы кривой распределения, можно визуально убедиться в нормальности и определить те параметры, которые определяют нормальность;

1.2.2 вычисляется среднее значение, медиана и мода, и на основе этого определяется отклонение от нормального распределения. Если мода, медиана и среднее арифметическое друг от друга значительно не отличаются, мы имеем дело с нормальным распределением. Если медиана значительно отличается от среднего, то мы имеем дело с асимметричной выборкой.

1.2.3 эксцесс кривой распределения должен быть равен 0. Кривые с положительным эксцессом значительно более вертикальны, чем кривая нормального распределения. Кривые с отрицательным эксцессом являются более пологими по сравнению с кривой нормального распределения;

1.2.4 после определения среднего значения и стандартного отклонения с помощью данных, представленных в таблице П1 приложения, находят следующие четыре интервала распределения и сравнивают их с действительными данными ряда:

а) $\bar{x} \pm 0{,}3\sigma$ — к интервалу должно относиться около 25% частоты совокупности, б) $\bar{x} \pm 0,7\sigma$ — к интервалу должно относиться около 50% частоты совокупности,

в) $\bar{x} \pm 1,1\sigma$ — к интервалу должно относиться около 75% частоты совокупности,

г) $\bar{x} \pm 3\sigma$ — к интервалу должно относиться около 100% частоты совокупности.

Если указанные условия выполняются, можно использовать параметрические критерии.

1.3 Практические задания

1.3.1 Номинальная масса брутто баночки сметаны (200±10) г. Взвешивание 30 баночек дало следующие результаты:

193.4	196.7	198.8	199.3	203.3
193.6	197.1	198.9	199.4	203.6
194.5	197.7	198.9	199.7	203.8
193.6	197.1	198.9	199.4	203.6
194.9	197.9	199.0	200.4	204.0
196.2	198.3	199.1	200.7	205.2

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.2 Номинальная масса упаковки чая (5±0,1) г. Взвешивание 25 упаковок дало следующие результаты:

4.97	4.80	5.05	4.85	5.00
4.98	4.80	5.06	4.88	5.01
4.99	4.81	5.07	4.91	5.01
5.00	4.81	5.08	4.92	5.02
5.00	4.83	5.10	4.92	5.04

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.3 Вес сверла Ø4 мм, поступившего в продажу в магазин (20±0,1) г.

Взвешивание 30 свёрл дало следующие результаты:

19.8	20.2	20.0	20.3	19.9	20.2
20.0	20.1	19.8	19.7	20.0	20.0
19.8	19.9	20.1	20.3	19.8	19.8
20.0	20.1	19.8	19.7	20.0	20.0
19.8	20.2	20.0	20.3	19.9	20.2

Определить, соответствует ли распределение веса свёрл нормальному закону?

1.3.4 Измерение размеров твёрдой фазы (щебня) для приготовления бетона дало следующие результаты:

29.1	33.6	37.1	33.3	29.4	29.0	28.3	24.5
26.2	35.2	28.0	26.7	28.5	28.9	28.8	27.1
30.7	23.4	35.0	27.9	35.9	34.0	30.4	27.7
33.8	29.3	25.2	24.9	32.6	29.7	28.9	23.6

Определить, соответствует ли распределение размеров щебня нормальному закону?

1.3.5 Номинальная ширина клавиши соломотряса комбайна (200±1,0) мм. Измерение 30 клавиш дало следующие результаты:

199.4	199.7	199.8	199.3	200.3
199.6	199.1	199.9	199.4	200.6
199.5	199.7	199.9	199.7	200.8
199.6	199.1	199.9	199.4	200.6
199.9	197.9	199.0	199.4	200.0
199.2	199.3	199.1	200.0	200.2

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.6 Длина цветного карандаша составляет (20±1,0) мм. Измерение 30 карандашей дало следующие результаты:

19.9	20.2	20.1	19.9	19.6
20.0	20.3	19.7	20.0	20.4
20.0	19.6	19.9	20.2	20.5
20.2	20.0	19.9	20.4	19.8
20.2	19.8	20.1	20.2	20.2
19.9	20.5	19.8	20.0	20.0

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.7 Длина карандаша составляет (20±1,0) мм. Измерение 30 карандашей дало следующие результаты:

20.2	20.0	20.0	20.4	19.8
20.1	20.0	20.0	20.3	20.4
20.2	20.3	20.6	20.1	19.6
20.3	19.5	20.5	20.0	20.2
20.1	19.8	19.8	20.5	20.4
19.7	20.3	20.0	20.1	19.8

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.8 Объём пакетика концентрированного молока составляет 10 мл. определение объёмов 30 пакетиков дало следующие результаты:

9.9	10.0	10.4	10.0	9.9
10.0	10.2	9.8	10.1	10.0
10.5	10.0	10.0	9.8	10.3
10.0	10.5	10.2	10.3	10.3
10.0	10.2	9.8	10.4	10.4
10.0	10.0	10.4	10.2	10.1

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.9 Объём пакетика сахара составляет 5 г. определение объёмов 30 пакетиков дало следующие результаты:

5.0	4.9	5.0	4.8	4.9
4.6	5.0	4.7	5.1	4.8
4.9	5.1	4.7	4.8	4.6
4.8	4.7	4.7	4.9	5.2
4.9	4.5	4.9	5.2	4.8
4.6	4.9	5.0	5.3	5.0

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.3.10 Измерение массы 30 однотипных чайных ложечек в столовой дало следующие результаты:

18.7	18.5	17.7	18.0	18.2
18.5	18.4	18.1	18.0	17.8
18.0	18.7	17.7	18.1	17.8
17.2	17.6	18.3	18.0	19.1
17.4	19.0	17.8	17.3	17.5
18.1	19.0	17.0	18.1	18.1

Определить, соответствует ли распределение нормальному закону?

1.4 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт среднего значения и стандартного отклонения, значения площадей искомых интервалов, заключение.

Практическая работа 2
Критерий Стьюдента (*t*-критерий)

2.1 Теоретические сведения

Критерий Стьюдента (t) позволяет найти вероятность того, что среднее значение выборки соответствует некоторому заданному числу, либо что оба средних значения в выборке относятся к одной и той же совокупности. Данный критерий наиболее часто используется для проверки гипотезы о соответствии среднего выборки конкретному значению или (чаще), что средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности.

При использовании критерия сравнения двух выборок можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух независимых, несвязанных выборок (так называемый двухвыборочный t-критерий). В этом случае есть контрольная группа и экспериментальная (опытная) группа, количество испытуемых в группах может быть различно. Во втором случае одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних и используется так называемый парный t-критерий. Выборки при этом называют зависимыми, связанными.

Критические значения для t-критерия представлены в таблице П2 приложения.

2.2 *t*-критерий Стьюдента для одной выборки

t-критерий для одной выборки позволяет проверить гипотезу о равенстве выборочного среднего некоторому заданному числу.

В так называемых одновыборочных t-критериях, наблюдаемое среднее $\overline{X}$ (вычисленное по реализации выборки) сравнивается с ожидаемым (или эталонным) средним выборки μ (т.е. с некоторым теоретическим средним).

Гипотезы: $H_0 : \overline{X} = \mu; \quad H_1 : \overline{X} \neq \mu.$

Статистика критерия: $$t_{эмп} = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad (2.1)$$

имеет t-распределение Стьюдента с *(n-1)* степенью свободы.

Выборочное стандартное отклонение S оценивается по наблюдаемой реализации выборки:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_i} (x_i - \overline{X})^2}{n-1}} \quad (2.2)$$

Вычисленное значение t проверяют на предмет попадания в критическую область (критическое значение можно найти по таблице П2 приложения).

Если вычисленное значение $t_{эмп}$ попадает в критическую область ($>t_{кр}$), то говорят, что H_0 отвергается на уровне α в пользу альтернативы.

Практические задания к разделу 2.2 (номер варианта определяется преподавателем)

2.2.1 Вал Ø$40_{-0,8}$ (μ=39,6)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (39,6).

39.7	39.6	39.7	40.3	39.4	40.3	39.2	39.6	39.8	39.8
39.4	39.3	39.7	39.3	39.5	39.1	39.6	40.4	39.6	39.7
39.9	39.2	40.2	40.0	39.3	39.7	39.7	40.1	40.0	40.5
40.2	39.5	39.8	40.1	39.7	40.1	39.8	40.5	39.7	39.3
40.2	39.6	39.7	40.4	39.8	39.5	39.7	39.6	40.0	39.6

2.2.2 Отверстие Ø$40^{+1,2}$ (μ=40,6)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (40,6).

40.7	40.5	40.5	40.8	40.6	40.7	40.9	40.7	40.6	40.6
40.2	40.5	40.6	40.7	40.6	40.7	40.4	40.4	40.5	40.4
40.7	40.9	40.1	40.2	40.6	40.4	40.3	40.6	40.4	40.3
40.3	40.8	40.4	40.4	40.8	40.5	40.5	40.6	40.3	40.9

2.2.3 Вал Ø$60_{-1,0}$ (μ=59,5)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (59,5).

59.48	59.31	59.38	59.43	59.60	59.42	59.54	59.51	59.47	59.46
59.65	59.46	59.37	59.48	59.36	59.54	59.45	59.35	59.63	59.57
59.68	59.46	59.48	59.38	59.49	59.45	59.48	59.46	59.53	59.53
59.48	59.54	59.39	59.65	59.45	59.64	59.52	59.48	59.61	59.48
59.66	59.46	59.42	59.46	59.46	59.63	59.38	59.44	59.55	59.41

2.2.4 Отверстие $Ø10^{+0,06}$ (μ=10,03)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (10,03).

10.028	10.027	10.028	10.039	10.019	10.036	10.026	10.029	10.025	10.028
10.024	10.022	10.028	10.019	10.027	10.032	10.018	10.027	10.026	10.029
10.031	10.021	10.037	10.029	10.028	10.036	10.034	10.031	10.028	10.034
10.036	10.025	10.030	10.035	10.031	10.032	10.020	10.036	10.031	10.030

2.2.5 Вал $Ø32^{-0,2}$ (μ=31,9)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (31,9).

31.5	34.6	31.0	28.8	31.5	31.2	34.5	31.9
30.1	28.7	29.5	31.1	31.4	35.0	29.6	31.2
32.4	31.6	29.2	31.4	34.0	33.3	32.8	33.0
33.9	33.6	30.5	32.2	31.9	35.6	33.4	31.4
33.8	30.4	30.8	31.5	31.7	31.0	34.9	33.1

2.2.6 Отверстие $Ø45^{+0,4}$ (μ=45,2)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (45,2).

44,4	44,5	45,5	45,1	46,1	47,4	42,9	44,0	43,3	45,7
46,1	45,9	45,5	44,5	46,4	43,4	46,0	44,6	43,8	44,0
46,1	45,0	46,3	46,0	44,9	44,5	45,9	45,9	43,9	45,0
45,6	45,8	45,1	45,4	45,5	47,5	45,7	44,6	46,4	47,6
43,5	45,7	43,3	45,3	45,5	45,6	46,2	47,5	45,3	45,2

2.2.7 Вал $Ø65_{-2,0}$ (μ=64,0)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (64,0).

64,4	63,5	64,6	65,4	64,3	64,6	63,7	64,8	63,2	64,4
63,6	63,8	63,1	63,7	63,5	63,9	64,6	64,2	63,9	64,0
63,9	64,8	63,2	64,1	64,9	63,4	63,8	64,0	63,3	63,9
64,6	64,8	62,9	64,3	63,5	63,6	63,7	64,6	63,8	63,8
64,2	64,4	63,5	63,5	63,0	63,8	63,8	63,7	63,8	64,6

2.2.8 Отверстие $Ø85^{+0,4}$ (μ=85,2)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (85,2).

84,5	85,2	85,1	85,3	85,9	85,4	84,2	85,5	84,8	85,4
85,2	85,6	85,6	84,2	85,5	84,6	85,3	84,5	85,1	84,9
85,5	85,0	85,2	84,6	84,9	85,3	85,4	85,3	84,9	85,2
85,9	85,8	85,7	85,5	84,0	84,3	85,3	85,0	85,8	85,2
85,8	85,5	85,1	85,1	85,7	85,2	84,4	85,1	85,2	84,6

2.2.9 Вал Ø$20_{-0,08}$ (μ=19,96)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (19,96).

19,7	19,3	19,1	18,4	20,9	20,6	18,3	18,2	19,5	20,1
19,9	20,9	18,9	19,9	19,3	19,6	19,8	19,4	18,9	19,5
19,8	20,2	20,3	18,3	20,9	21,0	19,4	19,9	20,6	19,7
19,9	19,8	21,1	19,1	19,7	20,1	20,9	19,5	20,0	18,8
18,7	19,5	20,0	20,5	19,1	17,9	19,6	19,1	20,9	20,9

2.2.10 Отверстие Ø$30^{+0,4}$ (μ=30,2)

Для представленной выборки определить, соответствует ли распределение ожидаемому (30,2).

29,3	30,1	30,4	30,6	30,2	30,1	30,3	30,0	30,2	29,5
30,3	30,4	30,1	29,9	30,5	29,6	30,0	30,1	30,2	30,5
29,9	30,0	30,5	29,7	29,7	30,1	30,6	30,6	30,6	30,4
29,9	29,9	30,0	30,4	30,3	29,6	30,3	29,3	29,9	29,8
29,7	29,7	30,1	30,5	30,1	30,4	29,8	29,8	30,4	30,4

2.3 *t*-критерий Стьюдента для независимых выборок

Статистика критерия для случая несвязанных, независимых выборок равна:

$$t_{эмп} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma_{x-y}} \qquad (2.3)$$

где $\overline{X}, \overline{Y}$ — средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах, σ_{x-y} - стандартная ошибка разности средних арифметических. Находится из формулы:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n_1}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{1}^{n_2}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \qquad (2.4)$$

где n_1 и n_2 соответственно величины первой и второй выборки.

Если n_1=n_2, то стандартная ошибка разности средних арифметических будет считаться по формуле:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n_1}(x_i - \overline{X})^2 + \sum_{1}^{n_2}(y_i - \overline{Y})^2}{(n-1)n}}, \qquad (2.5)$$

где n величина выборки.

Подсчет числа степеней свободы осуществляется по формуле: $k = n_1 + n_2 - 2$. (При численном равенстве выборок $k = 2n - 2$.)

Далее необходимо сравнить полученное значение $t_{эмп}$ с теоретическим значением t—распределения Стьюдента. Если $t_{эмп} < t_{крит}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза.

Рассмотрим пример использования t-критерия Стьюдента для несвязных и неравных по численности выборок.

В двух группах учащихся — экспериментальной и контрольной — получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; таблица 2.1).

Таблица 2.1

Результаты эксперимента

Первая группа (экспериментальная) n_1=11 человек	Вторая группа (контрольная) n_2=9 человек
12 14 13 16 11 9 13 15 15 18 14	13 9 11 10 7 6 8 10 11

Общее количество членов выборки: n_1=11, n_2=9.

Расчет средних арифметических: $\overline{X}$ =13,636; $\overline{Y}$ =9,444

Стандартные отклонения: s_x=2,460; s_y=2,186

Стандартная ошибка разности арифметических средних:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{60{,}545 + 38{,}222}{11 + 9 - 2}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9}\right)} = 1{,}053$$

Статистику критерия:

$$t_{эмп} = \frac{13{,}636 - 9{,}444}{1{,}053} = 3{,}981$$

Сравниваем полученное в эксперименте значение $t_{эмп}$ с табличным значением из таблицы П1 Приложения с учетом степеней свободы, равных числу испытуемых минус два.

Если полученное в эксперименте эмпирическое значение $t_{эмп}$ превышает табличное, то есть основания принять альтернативную гипотезу (H_1) о том, что учащиеся экспериментальной группы показывают в среднем более высокий уровень знаний.

Табличное значение $t_{крит}$ = 2,10 при допущении возможности риска сделать ошибочное суждение в пяти случаях из ста (уровень значимости=5 % или 0,05).

В эксперименте $t_{эмп}$ =3,981, табличное $t_{крит}$ =2,10.

3,981>2,10, отсюда следует вывод о преимуществе экспериментального обучения.

Если полученное в опыте значение $t_{эмп}$ окажется меньше табличного, тогда надо принять нулевую гипотезу (H_0).

Преимущество экспериментального метода не столько доказано, сколько показано, потому что с самого начала допускается риск ошибиться в пяти случаях из ста (p=0,05). Наш эксперимент мог быть одним из этих пяти случаев. То, что H_1 = 95% возможных случаев говорит в пользу альтернативной гипотезы, а это достаточно убедительный аргумент в статистическом доказательстве.

Практические задания к разделу 2.3 (номер варианта определяется преподавателем)

Номер варианта																			
1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
10	10	11	14	13	11	7	7	16	18	6	9	26	28	14	14	10	9	29	32
9	11	12	8	15	16	7	7	12	13	9	8	22	23	14	16	10	9	28	29
8	8	12	13	12	13	5	5	19	16	6	8	26	26	14	13	9	10	31	30
10	10	11	11	12	12	8	8	17	18	12	6	24	25	15	17	12	11	29	28
9	12	13	11	12	15	8	8	16	18	9	9	23	25	14	16	9	13	30	34
10	10	12	13	12	14	5	11	16	18	8	8	24	24	15	13	10	11	33	29
9	9	12	13	13	13	5	6	13	14	11	8	24	26	11	14	11	11	28	33
9	10	13	12	12	14	7	7	17	18	7	10	23	23	15	14	12	12	29	30
10	10	14	10	17	13	5	6	15	14	10	10	23	24	15	11	9	9	26	33
11	9	12	13	13	12	4	6	15	16	10	9	29	23	15	15	11	10	33	32
9	11	12	12	11	11	7	7	18	21	10	10	26	24	16	14	11	11	26	27
10	11	12		12	11	4	5	17	17	7	8	24	23	15	16	9	10	32	34
10	10	10		13	11	8	8	15	17	8	11	24	25	15	14	12	9	32	30
11	12	12		11		6	6	17	20	9	7	23	22	13	15	10	12	30	31
9	9	13				7	7	14	16	10	9	22	24	14	15	10	10	35	29

Примечание: в задании второй столбец является контрольным

2.4 *t*-критерий Стьюдента для связанных (парных) выборок

В случае связанных выборок с равным числом измерений в каждой можно использовать более простую формулу *t*-критерия Стьюдента.

Вычисление значения *t* осуществляется по формуле:

$$t_{эмп} = \frac{\overline{d}}{Sd} \qquad (2.5)$$

где $d_i = x_i - y_i$ — разности между соответствующими значениями переменной *X* и переменной *У*, а $\overline{d}$ - среднее этих разностей;

Sd вычисляется по следующей формуле:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n(n-1)}} \qquad (2.5)$$

Число степеней свободы *k* определяется по формуле *k*=*n*-1. Рассмотрим пример использования *t*-критерия Стьюдента для связных и, очевидно, равных по численности выборок.

Если $t_{эмп} < t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.

Пример к разделу 2.4 Изучался уровень ориентации учащихся на художественно-эстетические ценности. С целью активизации формирования этой ориентации в экспериментальной группе проводились беседы, выставки детских рисунков, были организованы посещения музеев и картинных галерей, проведены встречи с музыкантами, художниками и др. Закономерно встает вопрос: какова эффективность проведенной работы? С целью проверки эффективности этой работы до начала эксперимента и после давался тест. Из методических соображений в табл. 2.2 приводятся результаты небольшого числа испытуемых.

Таблица 2.2

Результаты эксперимента

Ученики (n=10)	Баллы		Вспомогательные расчеты	
	до начала эксперимента (*X*)	в конце эксперимента (*У*)	*d*	d^2
Иванов	14	18	4	16
Новиков	20	19	-1	1
Сидоров	15	22	7	49
Пирогов	11	17	6	36
Агапов	16	24	8	64
Суворов	13	21	8	64
Рыжиков	16	25	9	81
Серов	19	26	7	49
Топоров	15	24	9	81
Быстров	9	15	6	36
Σ	148	211	63	477
Среднее	14,8	21,1		

В начале произведем расчет по формуле:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

Определяем *Sd*

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{477 - 63\frac{63}{10}}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{477 - 396{,}9}{90}} = \sqrt{0{,}890} = 0{,}943$$

И, наконец, определяем $t_{эмп}$. Получим:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{d}}{Sd} = \frac{6{,}3}{0{,}943} = 6{,}678$$

Число степеней свободы: k=10-1=9. $t_{крит}$ =2.262 (*табл. 1 Приложения*), экспериментальное $t_{эмп}$=6,678, откуда следует возможность принятия альтернативной гипотезы (H_1) о достоверных различиях средних арифметических, т. е. делается вывод об эффективности экспериментального воздействия.

В терминах статистических гипотез полученный результат будет звучать так: на 5% уровне гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1.

Практические задания к разделу 2.4 (номер варианта определяется преподавателем)

<table>
<tr><td colspan="10">Номер варианта</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>4.96</td><td>6.63</td><td>9.2</td><td>13.7</td><td>11.8</td><td>13.5</td><td>12.20</td><td>16.7</td><td>17.1</td><td>20.7</td></tr>
<tr><td>5.18</td><td>7.02</td><td>10.0</td><td>13.6</td><td>12.1</td><td>13.5</td><td>12.31</td><td>16.5</td><td>18.3</td><td>20.8</td></tr>
<tr><td>5.28</td><td>7.10</td><td>10.0</td><td>13.5</td><td>12.1</td><td>13.9</td><td>13.60</td><td>16.5</td><td>19.5</td><td>20.9</td></tr>
<tr><td>6.20</td><td>7.26</td><td>10.5</td><td>13.3</td><td>12.6</td><td>14.2</td><td>13.66</td><td>16.3</td><td>19.6</td><td>21.1</td></tr>
<tr><td>6.38</td><td>7.39</td><td>10.6</td><td>13.2</td><td>12.9</td><td>14.3</td><td>13.72</td><td>16.1</td><td>19.6</td><td>21.6</td></tr>
<tr><td>6.46</td><td>7.49</td><td>10.9</td><td>13.2</td><td>13.5</td><td>14.4</td><td>14.17</td><td>15.6</td><td>19.8</td><td>21.6</td></tr>
<tr><td>6.90</td><td>7.69</td><td>10.9</td><td>13.0</td><td>13.8</td><td>14.5</td><td>14.38</td><td>15.6</td><td>20.0</td><td>21.8</td></tr>
<tr><td>6.99</td><td>7.87</td><td>11.4</td><td>13.0</td><td>14.1</td><td>14.6</td><td>14.60</td><td>15.5</td><td>20.0</td><td>21.8</td></tr>
<tr><td>7.07</td><td>7.88</td><td>12.7</td><td>12.9</td><td>14.1</td><td>14.6</td><td>14.61</td><td>15.5</td><td>20.1</td><td>21.8</td></tr>
<tr><td>7.12</td><td>8.10</td><td>12.8</td><td>12.9</td><td>14.2</td><td>14.7</td><td>14.99</td><td>15.3</td><td>21.0</td><td>22.3</td></tr>
<tr><td>7.63</td><td>8.13</td><td>13.2</td><td>12.9</td><td>14.4</td><td>14.7</td><td>15.73</td><td>15.1</td><td>21.4</td><td>22.3</td></tr>
<tr><td>7.64</td><td>8.25</td><td>13.4</td><td>12.8</td><td>14.5</td><td>14.7</td><td>16.14</td><td>15.1</td><td>21.5</td><td>22.4</td></tr>
<tr><td>7.76</td><td>8.28</td><td>13.6</td><td>12.8</td><td>14.9</td><td>14.7</td><td>16.35</td><td>14.8</td><td>22.4</td><td>22.7</td></tr>
<tr><td>8.38</td><td>8.41</td><td>13.9</td><td>12.7</td><td>15.3</td><td>14.8</td><td>16.57</td><td>14.3</td><td>22.9</td><td>23.3</td></tr>
<tr><td>8.49</td><td>8.59</td><td>14.2</td><td>12.5</td><td>15.5</td><td>14.9</td><td>17.03</td><td>13.8</td><td>23.6</td><td>23.5</td></tr>
<tr><td colspan="10">Номер варианта</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td>7.38</td><td>12.6</td><td>31.7</td><td>33.8</td><td>31.9</td><td>39.8</td><td>33.7</td><td>35.8</td><td>20.3</td><td>24.1</td></tr>
<tr><td>8.18</td><td>12.0</td><td>29.2</td><td>34.4</td><td>33.1</td><td>39.8</td><td>34.1</td><td>35.9</td><td>20.5</td><td>23.8</td></tr>
<tr><td>8.31</td><td>11.0</td><td>31.5</td><td>34.6</td><td>33.6</td><td>39.5</td><td>35.1</td><td>36.2</td><td>20.7</td><td>23.8</td></tr>
<tr><td>8.42</td><td>10.7</td><td>32.0</td><td>34.7</td><td>34.8</td><td>39.0</td><td>35.2</td><td>36.3</td><td>20.9</td><td>23.6</td></tr>
<tr><td>8.67</td><td>10.2</td><td>33.2</td><td>35.0</td><td>35.2</td><td>38.8</td><td>35.6</td><td>36.7</td><td>21.0</td><td>23.5</td></tr>
<tr><td>8.75</td><td>10.2</td><td>33.6</td><td>35.5</td><td>35.4</td><td>38.8</td><td>36.2</td><td>36.9</td><td>21.2</td><td>23.4</td></tr>
<tr><td>8.81</td><td>10.2</td><td>33.7</td><td>35.6</td><td>35.5</td><td>38.7</td><td>37.1</td><td>37.0</td><td>21.7</td><td>23.4</td></tr>
<tr><td>8.81</td><td>10.0</td><td>33.9</td><td>35.6</td><td>35.9</td><td>38.3</td><td>37.7</td><td>37.2</td><td>22.0</td><td>23.2</td></tr>
<tr><td>9.11</td><td>9.9</td><td>34.0</td><td>35.8</td><td>36.7</td><td>38.2</td><td>37.9</td><td>37.3</td><td>22.0</td><td>23.1</td></tr>
<tr><td>9.15</td><td>9.7</td><td>34.5</td><td>35.9</td><td>37.2</td><td>38.1</td><td>38.6</td><td>37.7</td><td>22.0</td><td>23.0</td></tr>
<tr><td>9.17</td><td>9.4</td><td>34.8</td><td>36.0</td><td>38.0</td><td>38.0</td><td>38.7</td><td>37.8</td><td>22.1</td><td>23.0</td></tr>
<tr><td>9.51</td><td>9.1</td><td>35.7</td><td>36.0</td><td>38.3</td><td>36.9</td><td>39.1</td><td>38.2</td><td>22.5</td><td>22.7</td></tr>
<tr><td>9.53</td><td>8.9</td><td>36.3</td><td>36.2</td><td>38.8</td><td>36.7</td><td>39.4</td><td>39.1</td><td>22.8</td><td>22.5</td></tr>
<tr><td>9.54</td><td>8.7</td><td>36.3</td><td>36.3</td><td>38.9</td><td>36.6</td><td>39.7</td><td>39.2</td><td>23.6</td><td>22.4</td></tr>
<tr><td>9.99</td><td>8.4</td><td>37.0</td><td>36.4</td><td>39.8</td><td>36.5</td><td>39.9</td><td>39.3</td><td>24.2</td><td>22.3</td></tr>
</table>

Примечание: в задании второй столбец является контрольным

1.4 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёты требуемых параметров и сравнения с табличными значениями, заключение.

Практическая работа 3
Критерий Фишера (F-критерий)

3.1 Теоретические сведения

Критерий Фишера позволяет сравнивать величины выборочных дисперсий двух независимых выборок. Для вычисления $F_{эмп}$ нужно найти отношение дисперсий двух выборок, причем так, чтобы большая по величине дисперсия находилась бы в числителе, а меньшая – в знаменателе. Формула вычисления критерия Фишера такова:

$$F_{эмп.} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \tag{3.1}$$

где S_x^2 и S_y^2 - дисперсии первой и второй выборки соответственно.

Так как, согласно условию критерия, величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя, то значение $F_{эмп}$ всегда будет больше или равно единице.

Число степеней свободы определяется также просто:

$k_1=n_l – 1$ для первой выборки (т.е. для той выборки, величина дисперсии которой больше) и $k_2=n_2 – 1$ для второй выборки.

Критические значения критерия Фишера, представленные в таблице П3 приложения, находятся по величинам k_1 (верхняя строчка таблицы) и k_2 (левый столбец таблицы).

Если $t_{эмп}>t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.

Пример: В двух третьих классах проводилось тестирование умственного развития десяти учащихся. Полученные значения величин средних достоверно не различались, однако психолога интересует вопрос — есть ли различия в степени однородности показателей умственного развития между классами.

Решение. Для критерия Фишера необходимо сравнить дисперсии тестовых оценок в обоих классах. Результаты тестирования представлены в таблице 3.1:

Таблица 3.1

Таблица результатов тестирования

№№ учащихся	Первый класс	Второй класс
1	90	41
2	29	49
3	39	56
4	79	64
5	88	72
6	53	65
7	34	63
8	40	87
9	75	77
10	79	62
Суммы	606	636
Среднее	60,6	63,6

Рассчитав дисперсии для переменных X и Y, получаем:

$$s_x^2=572{,}83;\ s_y^2=174{,}04$$

Тогда по формуле для расчета по F-критерию Фишера находим:

$$F_{эмп.}=\frac{572{,}83}{174{,}04}=3{,}29$$

По таблицы П2 приложения для F-критерия при степенях свободы в обоих случаях равных k=10 - 1 = 9 находим $F_{крит}$=3,18 (<3.29), следовательно, в терминах статистических гипотез можно утверждать, что H_0 (гипотеза о сходстве) может быть отвергнута на уровне 5%, а принимается в этом случае гипотеза H_1. Т.о. можно утверждать, что по степени однородности такого показателя, как умственное развитие, имеется различие между выборками из двух классов.

3.2 Практические задания

Определить, есть ли различия между двумя выборками (номер варианта определяется преподавателем)

Варианты																			
Вар. 1		Вар. 2		Вар. 3		Вар. 4		Вар. 5		Вар. 6		Вар. 7		Вар. 8		Вар. 9		Вар. 10	
35	36	31	33	37	37	45	42	45	37	43	42	14	13	13	17	35	37	14	13
34	31	36	35	44	38	42	44	44	44	46	37	12	17	11	16	30	28	12	17
36	30	34	30	39	41	37	44	48	39	49	43	15	13	14	17	32	34	15	13
33	35	33	31	40	35	43	34	45	40	49	43	18	15	14	14	35	29	18	15
32	35	31	34	43	42	43	41	42	43	48	43	17	16	15	15	35	33	17	16
34	33	34	36	39	40	43	44	45	39	43	38	18	15	14	13	33	30	18	15
29	30	34	31	40	37	38	41	43	40	43	47	11	14	14	16	28	32	11	14
31	33	35	34	39	40	47	39	42	39	46	43	15	14	14	18	35	35	15	14
34	31	34	30	42	37	43	38	49	42	42	40	17	17	18	17	36	38	17	17
32	34	36	32	40	36	40	38	48	40	42	42	13	13	15	16	34	34	13	13
33	38	34	31	43	38	42	34	44	43	52	37	14	18	15	16	36	32	14	18
30	33	35	31	47	39	37	40	47	47	49	43	12	15	14	13	38	24	12	15
33	32	34	32	49	40	43	42	47	49	50	45	11	13	19	14	36	31	11	13
31	31	32		46	39	45	38	46	46	45	45	13	13	20	16	32	31	13	13
	37	34		41	43	45	41	39	41	48	43	12		21	13	32	26	13	17
				42		43		43	42	43	40	10		19	12	36	25	11	
						40		50	45	48		9			11	33	27	14	

3.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёты требуемых параметров и сравнения с табличными значениями, заключение.

Практическая работа 4
Критерий Колмогорова-Смирнова

4.1 Общие сведения

Данный критерий также позволяет оценить существенность различий между двумя выборками; также возможно его применение для сравнения эмпирического распределения с теоретическим.

Критерий позволяет найти точку, в которой сумма накопленных частот расхождений между двумя распределениями является наибольшей, и оценить достоверность этого расхождения.

Нулевая гипотеза: H_0 - различия между двумя распределениями недостоверны (судя по точке максимального накопленного расхождения между ними); альтернативная: H_1 - различия значимы.

Схематично алгоритм применения критерия Колмогорова-Смирнова можно представить следующим образом (рисунок 4.1):

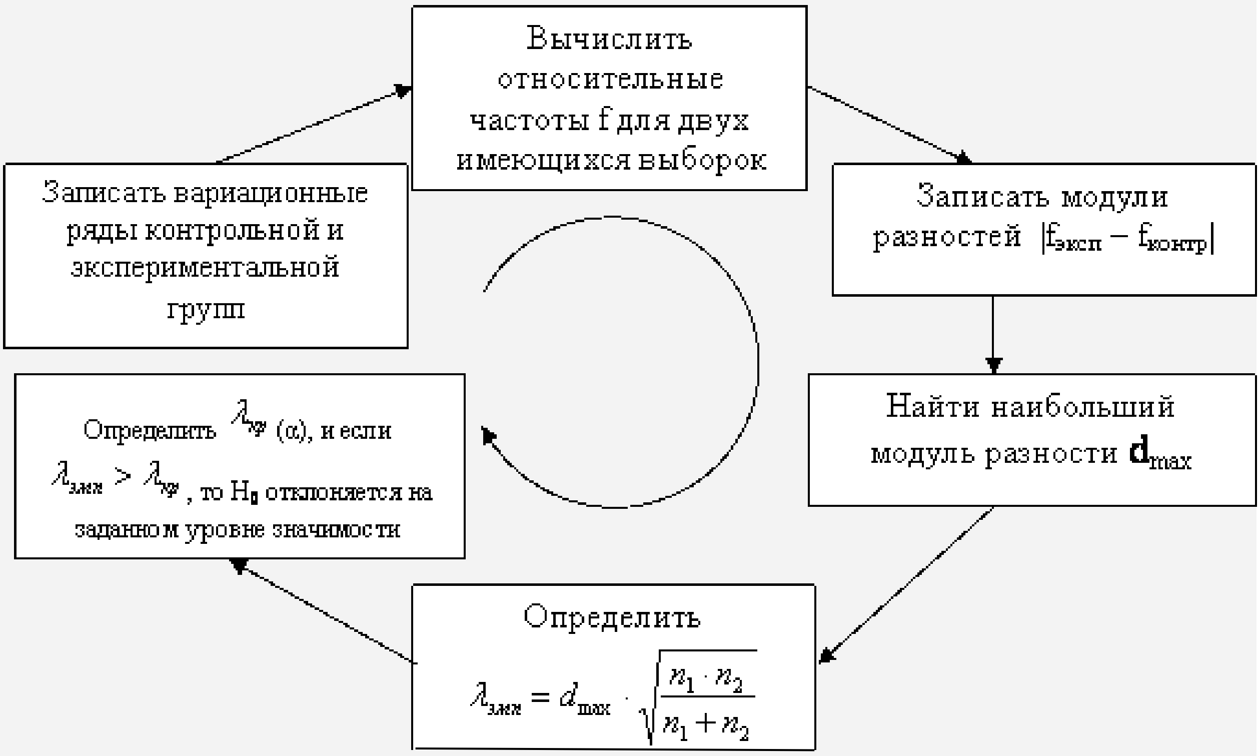


Рис. 4.1. Алгоритм применения критерия Колмогорова-Смирнова

Проиллюстрируем использование критерия Колмогорова-Смирнова на примере. При изучении качества термообработки были получены результаты для экспериментальных и контрольных групп образцов (таблицы 4.1 и 4.2). Являются ли значимыми различия между контрольной и экспериментальной выборками?

Таблица 4.1

Данные контрольной группы для примера

58	62	63	64	63	61	63	62	63	64
63	59	64	63	63	62	63	63	64	63

Таблица 2

Данные экспериментальной группы для примера

61	59	63	62	62	62	62	62	61	61
62	61	62	64	60	63	62	62	62	62
63	60	62	62	63	62	63	62	58	62
62	62	60	61	61	61	61	63	62	61
61	61	60	62	61	62	62	65	60	61
62	62	64	61	61	62	59	62	64	61
61	63	62	61	63	62	62	61	61	60
63	62	63	62	61	64	61	61	62	60
60	58	61	59	61	62	61	61	59	63
62	61	59	62	61	64	61	61	61	63

Вычисляем относительные частоты *f*, равные частному от деления частот на объём выборки, для двух имеющихся выборок.

Далее определяем модуль разности соответствующих относительных частот для контрольной и экспериментальной выборок. (Приемлемой считалась твёрдость в указанном диапазоне 60…62 *HRC*; твёрдость выше 62 *HRC* считается отличной, а ниже 60 *HRC* – неудовлетворительной.)

В результате исходная таблица примет следующий вид (таблица 4.3):

Таблица 4.3

Определение модулей разности частот

Диапазон твёрдости	Относительная частота экспериментальной группы ($f_{эксп}$)	Относительная частота контрольной группы ($f_{контр}$)	Модуль разности частот $\lvert f_{эксп} - f_{контр}\rvert$
Свыше 62	77/100≈0.77	14/20≈0.7	0. 07
60-62	16/100≈0.16	4/20=0.2	0.04
Ниже 60	7/100≈0.07	2/20=0,1	0.03

Среди полученных модулей разностей относительных частот выбираем наибольший, который обозначается d_{max}. В рассматриваемом примере 0.07>0.04>0.03, поэтому d_{max}=0.07.

Эмпирическое значение критерия $\lambda_{эмп}$ определяется с помощью формулы:

$$\lambda_{эмп} = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{4.1}$$

Чтобы сделать вывод о схожести по рассматриваемому критерию между двумя выборками, сравним экспериментальное значение критерия с его критическим значением, определяемым по таблице П4 приложения, исходя из уровня значимости α. В качестве нулевой гипотезы примем утверждение о том, что сравниваемые выборки незначительно отличаются друг от друга по уровню твёрдости. При этом нулевую гипотезу следует принять в том случае, если наблюдаемое значение критерия не превосходит его критического значения.

$$\lambda_{эмп} = 0{,}07\sqrt{\frac{100 \times 20}{100 + 20}} = 0{,}069$$

Считая, что α=0,05 , по таблице П4 определяем критическое значение критерия: $\lambda_{кр}$(0,05)=0,1358>0,069=$\lambda_{эмп}$, следовательно, принимаем нулевую гипотезу!

Несколько изменим условия примера (таблица 4.4)

Таблица 4.4

Определение модулей разности частот в новых условиях

Диапазон твёрдости	Относительная частота экспериментальной группы ($f_{эксп}$)	Относительная частота контрольной группы ($f_{контр}$)	Модуль разности частот $\lvert f_{эксп} - f_{контр}\rvert$
Свыше 62	77/100≈0.77	12/20≈0.6	0. 17
60-62	16/100≈0.16	4/20=0.2	0.04
Ниже 60	7/100≈0.07	4/20=0,2	0.03

0,17>0,2=0,2, принимаем d_{max}=0.17

$$\lambda_{эмп} = 0{,}17\sqrt{\frac{100 \times 20}{100 + 20}} = 0{,}69$$

Определяем критическое значение критерия: $\lambda_{кр}$(0,05)=0,1358<0, 69=$\lambda_{эмп}$, следовательно, нулевая гипотеза отвергается!

4.2 Практические задания

Сборная команда области показывает следующие результаты по плаванию на дистанции 100 м вольным стилем (контрольная группа), а сборная университета на той же дистанции (экспериментальная группа). Достаточно ли высок уровень подготовки университетской сборной для включения пловцов в резерв сборной области, если норматив мастера спорта выше 51 с, достаточный уровень – 51 - 53 с, не достаточный уровень хуже 53 с?

Вариант 1

Контр группа
52.40
52.63
54.57
54.89
49.19
50.23
51.19
51.68
51.80
52.11

Экспериментальная группа			
52.21	49.91	53.49	51.40
52.25	49.32	53.54	51.50
52.35	49.51	53.92	51.58
52.82	49.57	54.09	51.65
52.85	49.72	54.23	51.71
52.85	50.03	55.16	51.73
53.14	50.36	55.17	51.88
53.15	50.38	55.65	52.08
53.19	50.64	55.68	52.08
53.38	51.21	55.90	52.21

Вариант 2

Контр группа
52.13
50.48
49.96
52.20
53.91
49.68
48.61
53.42
51.10
48.35

Экспериментальная группа			
53.37	51.88	52.60	53.32
52.41	50.64	48.57	54.31
52.07	53.94	49.59	55.35
50.15	49.69	51.28	51.04
49.71	53.84	48.92	51.83
54.35	54.34	54.00	51.29
53.18	49.62	51.43	48.18
51.22	51.09	55.78	51.76
51.02	50.79	48.76	53.01
48.83	53.09	52.33	49.06

Вариант 3

Контр группа
52.35
49.50
52.59
50.91
51.82
50.47
50.18
49.42
51.07
51.59

Экспериментальная группа			
49.30	56.34	54.27	56.75
55.23	55.36	55.04	56.18
50.73	50.61	54.67	56.55
55.09	55.82	52.48	53.39
54.38	48.42	52.66	53.66
52.60	56.55	55.55	55.17
50.36	49.87	56.16	49.03
48.02	53.33	52.10	54.07
55.65	49.63	53.04	52.90
48.72	54.50	55.47	52.71

Вариант 4

Контр группа
52.40
52.63
54.57
54.89
49.19
50.23
51.19
51.68
51.80
52.11

Экспериментальная группа			
49.30	56.34	54.27	56.75
55.23	55.36	55.04	56.18
50.73	50.61	54.67	56.55
55.09	55.82	52.48	53.39
54.38	48.42	52.66	53.66
52.60	56.55	55.55	55.17
50.36	49.87	56.16	49.03
48.02	53.33	52.10	54.07
55.65	49.63	53.04	52.90
48.72	54.50	55.47	52.71

Вариант 5

Контр группа
52.13
50.48
49.96
52.20
53.91
49.68
48.61
53.42
51.10
48.35

Экспериментальная группа			
53.37	51.88	52.60	53.32
52.41	50.64	48.57	54.31
52.07	53.94	49.59	55.35
50.15	49.69	51.28	51.04
49.71	53.84	48.92	51.83
54.35	54.34	54.00	51.29
53.18	49.62	51.43	48.18
51.22	51.09	55.78	51.76
51.02	50.79	48.76	53.01
48.83	53.09	52.33	49.06

Вариант 6

Контр группа
52.35
49.50
52.59
50.91
51.82
50.47
50.18
49.42
51.07
51.59

Экспериментальная группа			
52.21	49.91	53.49	51.40
52.25	49.32	53.54	51.50
52.35	49.51	53.92	51.58
52.82	49.57	54.09	51.65
52.85	49.72	54.23	51.71
52.85	50.03	55.16	51.73
53.14	50.36	55.17	51.88
53.15	50.38	55.65	52.08
53.19	50.64	55.68	52.08
53.38	51.21	55.90	52.21

Вариант 7

Контр группа
52.40
52.63
54.57
54.89
49.19
50.23
51.19
51.68
51.80
52.11

Экспериментальная группа			
48.55	52.54	51.29	54.91
52.57	55.98	51.11	52.28
54.06	50.43	49.71	53.73
53.31	52.92	51.87	50.20
53.31	52.27	52.03	54.50
53.06	55.99	51.62	53.76
53.38	51.98	48.23	51.11
54.60	54.36	52.77	52.43
52.18	49.99	54.92	56.14
50.94	52.73	47.81	52.30

Вариант 8

Контр группа
52.13
50.48
49.96
52.20
53.91
49.68
48.61
53.42
51.10
48.35

Экспериментальная группа			
48.55	52.54	51.29	54.91
52.57	55.98	51.11	52.28
54.06	50.43	49.71	53.73
53.31	52.92	51.87	50.20
53.31	52.27	52.03	54.50
53.06	55.99	51.62	53.76
53.38	51.98	48.23	51.11
54.60	54.36	52.77	52.43
52.18	49.99	54.92	56.14
50.94	52.73	47.81	52.30

Вариант 9

Контр группа
52.35
49.50
52.59
50.91
51.82
50.47
50.18
49.42
51.07
51.59

Экспериментальная группа			
51.55	53.08	56.85	51.82
54.29	55.98	55.38	49.13
52.78	51.56	58.37	50.93
57.73	50.36	50.16	56.57
55.85	55.78	59.67	55.05
52.14	55.32	52.14	52.15
50.26	54.55	52.45	55.81
53.56	56.13	52.79	51.16
58.75	54.36	47.60	51.99
54.03	56.16	54.09	52.40

Вариант 10

Контр группа
52.40
52.63
54.57
54.89
49.19
50.23
51.19
51.68
51.80
52.11

Экспериментальная группа			
51.55	53.08	56.85	51.82
54.29	55.98	55.38	49.13
52.78	51.56	58.37	50.93
57.73	50.36	50.16	56.57
55.85	55.78	59.67	55.05
52.14	55.32	52.14	52.15
50.26	54.55	52.45	55.81
53.56	56.13	52.79	51.16
58.75	54.36	47.60	51.99
54.03	56.16	54.09	52.40

4.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёты требуемых параметров и сравнения с табличными значениями, заключение.

Практическая работа 5

Линейная корреляция

5.1 Общие сведения

Корреля́ция (от лат. *Correlatio* «соотношение, взаимосвязь») или корреляционная зависимость — статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин. При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин (стохастическая или вероятностная зависимость). Наличие или отсутствие корреляции характеризуется коэффициентом корреляции R_{xy} — это показатель взаимного вероятностного влияния двух случайных величин. Коэффициент корреляции может принимать значения от -1 до +1. Если абсолютное значение R_{xy} находится ближе к 1, то это свидетельство сильной связи между величинами, а если ближе к 0 — то, это говорит о слабой связи или ее отсутствии. Если абсолютное значение R_{xy} равно единице, то можно говорить о функциональной связи между величинами, то есть одну величину можно выразить через другую посредством математической функции.

Для графического представления корреляционной связи можно использовать прямоугольную систему координат с осями, которые соответствуют обеим переменным. Каждая пара значений маркируется при помощи определённого символа. Такой график называется диаграммой рассеяния или полем корреляции.

Рассмотрим методику построения диаграммы рассеяния на примере.

Имеется связанная выборка из 26 пар значений x_k,y_k (таблица 5.1):

Таблица 5.1

Исходные данные для построения диаграммы рассеяния

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	25.2	26.4	26.0	25.8	24.9	25.7	25.7	25.7	26.1	25.8
y_k	30.8	29.4	30.2	30.5	31.4	30.3	30.4	30.5	29.9	30.4

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_k	25.9	26.2	25.6	25.4	26.6	26.2	26.0	22.1	25.9	25.8
y_k	30.3	30.5	30.6	31.0	29.6	30.4	30.7	31.6	30.5	30.6

k	21	22	23	24	25	26
x_k	25.9	26.3	26.1	26.0	26.4	25.8
y_k	30.7	30.1	30.6	30.5	30.7	30.8

Требуется:

- вычислить коэффициент корреляции;
- проверить гипотезу зависимости случайных величин x и y, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;
- вычислить коэффициенты уравнения линейной регрессии;
- построить диаграмму рассеяния (корреляционное поле) и график линии регрессии.

Решение:

5.1.1 Вычисление коэффициента корреляции. Вычислить коэффициент корреляции можно по следующим формулам:

$$R_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (5.1)$$

где: cov(x,y) - ковариация случайных величин x и y

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M_x)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - M_y)^2 \qquad (5.2)$$

- оценки дисперсий случайных величин X и Y соответственно.

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_k, \quad M_y = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y_k \qquad (5.3)$$

- оценки математического ожидания случайных величин x и y соответственно.

$$R_{x,y} = \frac{M_{x,y} - M_x M_y}{S_x S_y};\tag{5.4}$$

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;\ M_y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k;\ M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\tag{5.5}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;\ S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\tag{5.6}$$

На практике, для вычисления коэффициента корреляции чаще используется формула (5.4) т.к. она требует меньше вычислений. Однако если предварительно была вычислена ковариация *cov(x,y)*, то выгоднее использовать формулу (5.1), т.к. кроме собственно значения ковариации можно воспользоваться и результатами промежуточных вычислений.

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (5.4), для этого вычислим значения x_k^2, y_k^2 и $x_k y_k$ и занесем их в таблицу5.2.

Таблица 5.2.

Результаты промежуточных расчётов

k	x_k	y_k	x_k^2	y_k^2	$x_k y_k$
1	25.2	30.8	635.04	948.64	776.16
2	26.4	29.4	696.96	864.36	776.16
3	26.0	30.2	676.00	912.04	785.20
4	25.8	30.5	665.64	930.25	786.90
5	24.9	31.4	620.01	985.96	781.86
6	25.7	30.3	660.49	918.09	778.71
7	25.7	30.4	660.49	924.16	781.28
8	25.7	30.5	660.49	930.25	783.85
9	26.1	29.9	681.21	894.01	780.39
10	25.8	30.4	665.64	924.16	784.32
11	25.9	30.3	670.81	918.09	784.77
12	26.2	30.5	686.44	930.25	799.10
13	25.6	30.6	655.36	936.36	783.36
14	25.4	31	645.16	961.00	787.40
15	26.6	29.6	707.56	876.16	787.36
16	26.2	30.4	686.44	924.16	796.48
17	26	30.7	676.00	942.49000	798.20
18	22.1	31.6	488.41	998.56000	698.36
19	25.9	30.5	670.81	930.25	789.95
20	25.8	30.6	665.64	936.36	789.48
21	25.9	30.7	670.81	942.49	795.13
22	26.3	30.1	691.69	906.01	791.63
23	26.1	30.6	681.21	936.36	798.66
24	26	30.5	676.00	930.25	793.00
25	26.4	30.7	696.96	942.49	810.48
26	25.8	30.8	665.64	948.64	794.64

5.1.2 Вычислим M_x по формуле (4.5)

Сложим последовательно все элементы $x_k x_1 + x_2 + \ldots + x_{26} =$ 25.20 + 26.40 + ... + 25.80= 669.50

Разделим полученную сумму на число элементов 669.50 / 26 = 25.75 $M_x =$ 25.75

5.1.3 Аналогичным образом вычислим M_y.

$M_y =_k y_1 + y_2 + \ldots + y_{26}$ = 30.80 + 29.40 + ... + 30.80 = 793.00

Разделим полученную сумму на число элементов выборки 793.00000 / 26 = 30.50 M_y = 30.50

5.1.4. Аналогичным образом вычислим M_{xy}.

Сложим последовательно все элементы 6-го столбца таблицы 5.2

776.16000 + 776.16000 + ... + 794.64000 = 20412.830000

Разделим полученную сумму на число элементов

20412.83000 / 26 = 785.10885 M_{xy} = 785.108846

5.1.5. Вычислим значение S_x^2 по формуле (5.6).

Сложим последовательно все элементы 4-го столбца табл. 2

635.04 + 696.96 + ... + 665.64 = 17256.910

Разделим полученную сумму на число элементов

17256.91 / 26 = 663.72731

Вычтем из последнего числа квадрат величины M_x получим значение для S

S_x = 663.72731 - 25.75^2 = 663.72731 - 663.06250 = 0.66481

5.1.6. Вычислим значение S_y^2 по формуле (5.6).

Сложим последовательно все элементы 5-го столбца таблицы 5.1

948.64 + 864.36 + ... + 948.64 = 24191.840

Разделим полученную сумму на число элементов

24191.84/26= 930.45538

Вычтем из последнего числа квадрат величины M_y получим значение для S_y^2

S_y^2= 930.45538 - 30.50^2 = 930.45538 - 930.25 = 0.20538

5.1.7. Вычислим произведение величин S_x^2 и S_y^2.

$S_x^2 S_y^2$ = 0.66481 × 0.20538 = 0.136541

4.1.8. Извлечем из последнего числа квадратный корень, получим значение S_xS_y.

S_xS_y = 0.36951

5.1.9. Вычислим значение коэффициента корреляции по формуле (5.4.).

$R_{x,y}$ = (785.10885 - 25.75 × 30.50) / 0.36951 = (785.10885 - 785.375) / 0.36951 = 0.72028

Ответ: $R_{x,y}$ = -0,720279 – имеется значимая отрицательная корреляция.

5.2. Проверка значимости коэффициента корреляции (проверяем гипотезу зависимости).

Поскольку оценка коэффициента корреляции вычислена на конечной выборке, и поэтому может отклоняться от своего генерального значения, необходимо проверить значимость коэффициента корреляции. Проверка производится с помощью t-критерия:

$$t = \frac{r_{x,y}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,y}^2}} \qquad (5.7)$$

Случайная величина t следует t-распределению Стьюдента и по таблице t-распределения необходимо найти критическое значение критерия ($t_{кр.\alpha}$) при заданном уровне значимости α. Если вычисленное по формуле 5.7 значение t по модулю окажется меньше чем $t_{кр.\alpha}$, то зависимости между случайными величинами x и y нет. В противном случае, экспериментальные данные не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин.

5.2.1. Вычислим значение t-критерия по формуле (5.7); получим:

$$t = \frac{-0{,}7208\sqrt{26-2}}{\sqrt{1-(-0{,}7208)^2}} = -5{,}0868$$

5.2.2 Определим по таблице t-распределения критическое значение параметра $t_{кр.\alpha}$

Искомое значение $t_{кр.\alpha}$ располагается на пересечении строки соответствующей числу степеней свободы и столбца соответствующего заданному уровню значимости α.

В нашем случае число степеней свободы есть $n - 2 = 26 - 2 = 24$ и $\alpha = 0.05$, что соответствует критическому значению критерия $t_{кр.\alpha} = 2.064$ (таблица 3 Приложения)

5.2.3 Сравним абсолютное значение t-критерия и $t_{кр.\alpha}$

Абсолютное значение t-критерия не меньше критического $t = 5.08680$, $\underline{t_{кр.\alpha}} = 2.064$, следовательно экспериментальные данные, с вероятностью 0.95 $(1 - \alpha)$, не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин x и y.

5.3 Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии

Уравнение линейной регрессии представляет собой уравнение прямой, аппроксимирующей зависимость между случайными величинами x и y. Если считать, что величина x свободная, а y зависимая от x, то уравнение регрессии запишется следующим образом (5.8):

$$Y = a + bX \tag{5.8}$$

где:

$$b = r_{x,y}\frac{S_y}{S_x} \tag{5.9}$$

$$a = M_y - bM_x \tag{5.10}$$

Рассчитанный по формуле (5.9) коэффициент b называют коэффициентом линейной регрессии (в некоторых источниках его называют постоянным коэффициентом регрессии), а a - соответственно переменным.

Погрешности предсказания y по заданному значению x вычисляются по формулам :

Абсолютная погрешность -

$$\sigma_{y/x} = S_y\sqrt{1 - R_{x,y}^2} \tag{5.11}$$

Относительная погрешность –

$$\delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{M_y} \tag{5.12}$$

Величину $\sigma_{y/x}$ (5.11) еще называют остаточным средним квадратическим отклонением; оно характеризует уход величины y от линии регрессии, описываемой уравнением (5.8), при фиксированном (заданном) значении x.

5.3.1. Вычислим отношение

$$S_y^2 / S_x^2 = 0.20538 / 0.66481 = 0.30894$$

5.3.2. Извлечем из последнего числа квадратный корень - получим:

$$S_y / S_x = 0.55582$$

5.3.3 Вычислим коэффициент b по формуле (5.9)

$$b = -0.72028 \times 0.55582 = -0.40035$$

5.3.4 Вычислим коэффициент a по формуле (5.10)

$$a = 30.50000 - (-0.40035 \times 25.75000) = 40.80894$$

5.3.5 Оценим погрешности уравнения регрессии.

Извлечем из S_y^2 квадратный корень получим:

$$S_y = \sqrt{0{,}20538} = 0{,}45319$$

Возведем в квадрат $R_{x,y}$ получим:

$$R^2_{x,y} = -0.72028^2 = 0.51880$$

Вычислим абсолютную погрешность (остаточное среднее квадратическое отклонение) по формуле (5.11)

$$\sigma_{y,x} = 0{,}45319\sqrt{1 - 0{,}51880} = 0{,}31437$$

Вычислим относительную погрешность по формуле(5.12)

$$\delta_{y/x} = (0.31437 / 30.50000)100\% = 1.03073\%$$

Ответ: Уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$Y = 40.80894 -0.40035\ X$$

Погрешности уравнения:

$$\sigma_{y/x} = 0.31437\ ;\ \delta_{y/x} = 1.03073\%$$

5.4 Построение диаграммы рассеяния и графика линии регрессии.

(Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы диаграмма была максимально наглядной.)

5.4.1 Находим минимальный и максимальный элемент выборки x (это 18-й и 15-й элементы соответственно), $x_{min} = 22.10$ и $x_{max} = 26.60$.

5.4.2 Находим минимальный и максимальный элемент выборки y (это 2-й и 18-й элементы соответственно), $y_{min} = 29.40$ и $y_{max} = 31.60$.

5.4.3 На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки $x_{18} = 22.10$, и такой масштаб, чтобы на оси поместилась точка $x_{15} = 26.60$ и отчетливо различались остальные точки.

5.4.4 На оси ординат выбираем начальную точку чуть левее точки $y_2 = 29.40$, и такой масштаб, чтобы на оси поместилась точка $y_{18} = 31.60$ и отчетливо различались остальные точки.

5.4.5 На оси абсцисс размещаем значения x_k, а на оси ординат значения y_k.

5.4.6 Наносим точки (x_1, y_1), (x_2, y_2),…,(x_{26}, y_{26}) на координатную плоскость. Получаем диаграмму рассеяния (корреляционное поле), изображенное на рисунке 5.1.

5.4.7 Начертим линию регрессии:

Для этого найдем две различные точки с координатами (x_{r1}, y_{r1}) и (x_{r2}, y_{r2}) удовлетворяющие уравнению, нанесем их на координатную плоскость и проведем через них прямую. В качестве абсциссы первой точки возьмем значение $x_{min} = 22.10$. Подставим значение x_{min} в уравнение линейной регрессии, получим ординату первой точки. Таким образом имеем точку с координатами (22.10, 31.96127). Аналогичным образом получим координаты второй точки, положив в качестве абсциссы значение $x_{max} = 26.60$. Вторая точка будет: (26.60, 30.15970).

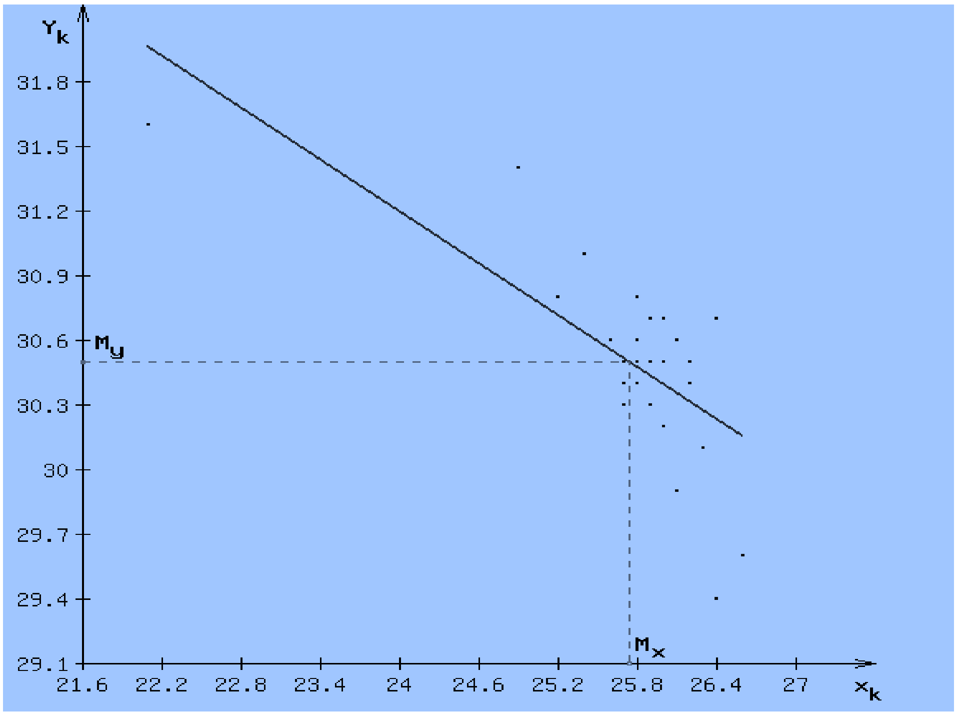


Рис. 5.1. Линия ререссии в соответствии с данными примера

Примечание: линия регрессии всегда проходит через точку средних значений величин x и y, т.е. точку с координатами (M_x, M_y).

5.5 Практические задания (номер варианта определяется преподавателем)

Варианты																			
Вар. 1		Вар. 2		Вар. 3		Вар. 4		Вар. 5		Вар. 6		Вар. 7		Вар. 8		Вар. 9		Вар. 10	
11	68	40	28	48	22	29	37	61	26	80	13	26	80	61	11	68	40	28	48
11	67	39	33	51	24	29	39	61	26	81	14	26	81	61	11	67	39	33	51
11	67	37	34	51	25	29	39	60	25	82	15	25	82	60	11	67	37	34	51
12	67	37	35	51	25	30	39	59	25	82	15	25	82	59	12	67	37	35	51
12	66	37	36	51	26	30	40	59	25	83	15	25	83	59	12	66	37	36	51
13	66	36	36	52	27	30	40	59	25	83	15	25	83	59	13	66	36	36	52
13	66	35	37	53	27	30	40	57	24	83	15	24	83	57	13	66	35	37	53
13	66	35	37	53	28	30	41	57	24	84	16	24	84	57	13	66	35	37	53
14	66	35	37	53	28	30	41	57	24	84	16	24	84	57	14	66	35	37	53
14	66	34	37	53	28	30	41	57	24	85	17	24	85	57	14	66	34	37	53
14	65	34	38	54	29	30	41	56	24	85	17	24	85	56	14	65	34	38	54
14	65	34	38	54	29	31	41	56	24	86	17	24	86	56	14	65	34	38	54
15	64	34	40	54	29	31	42	56	24	86	17	24	86	56	15	64	34	40	54
15	64	33	41	55	29	32	42	56	24	88	17	24	88	56	15	64	33	41	55
15	64	33	41	56	30	33	42	55	24	88	18	24	88	55	15	64	33	41	56
17	64	33	42	56	31	33	43	55	24	88	18	24	88	55	17	64	33	42	56
17	64	33	42	56	31	33	43	55	24	89	18	24	89	55	17	64	33	42	56
18	62	33	42	58	31	35	44	54	23	90	18	23	90	54	18	62	33	42	58
18	62	32	42	59	32	35	44	53	23	90	18	23	90	53	18	62	32	42	59
19	61	30	46	60	33	35	45	48	21	92	18	21	92	48	19	61	30	46	60

5.6 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёты требуемых параметров, уравнение корреляции и погрешности, заключение.

Практическая работа 6
Критерий Знаков (*G*-критерий)

6.1 Теоретические сведения

Сравнивая на глазок (по процентным соотношениям) результаты до и после какого-либо воздействия, исследователь приходит к заключению, что если наблюдаются различия, то имеет место различие в сравниваемых выборках. Подобный подход категорически неприемлем, так как для процентов нельзя определить уровень достоверности в различиях. Проценты, взятые сами по себе, не дают возможности делать статистически достоверные выводы. Чтобы доказать эффективность какого-либо воздействия, необходимо выявить статистически значимую тенденцию в смещении (сдвиге) показателей. Для решения подобных задач исследователь может использовать критерии различия, например, критерий знаков или критерий хи-квадрат.

Критерий знаков (G–критерий) - это непараметрический критерий, который основан на оценке разности попарно сопряженных вариант (например, до и после дополнительных занятий). Критерий предназначен для сравнения состояния некоторого свойства у членов двух зависимых выборок на основе измерений, сделанных по шкале не ниже ранговой.

Учитывается не величина, а направленность сдвигов. Применение критерия знаков не зависит от характера распределения данных. Изменения оценивают в альтернативной форме (увеличение-уменьшение и т.п., что обозначают знаками «+» и «-», откуда и произошло название критерия). Случаи, когда парные наблюдения не имеют разницы, в расчет не принимаются. Следует стремиться, чтобы количество нулевых разностей было минимальным, для чего необходимо повышать точность измерения показателей, что обеспечивает непрерывность выборочных данных.

Практическое применение критерия знаков включает следующие этапы:

– Определяется направленность изменений в сравниваемых наблюдениях.
– Подсчитывается общее число парных наблюдений, имеющих различия (n).

– Подсчитывается меньшее число однозначных результатов сравнения, обозначаемых как Z.

– Z сравнивается по специальной таблице (таблица 4 приложения) с критическими значениями для данного n.

Мощность критерия знаков ограничена и составляет примерно 2/3 мощности критерия Стьюдента, но и требование нормальности соблюдать не обязательно.

Критерий знаков может применяться как к совокупностям непрерывных признаков, так и для оценки различия полуколичественных признаков (баллы и т.п.) при достаточном числе их градаций.

Применение расчета G-критерия Знаков рассмотрим на примере:

Сравниваем между собой уровень тревожности по показаниям частоты сердечных сокращений группы людей до и после просмотра кинофильма «Экипаж», который будет служить в виде тренинга.

Шаг 1. Запишем значения в таблицу (таблица 6.1).

Шаг 2. Рассчитаем разность значений.

Для данного случая типичным сдвигом (H_0) будет считаться сдвиг в положительную сторону (7 значений, жирно), а нетипичным (H_1) - в отрицательную сторону (3 значения, курсив).

Таблица 6.1

Данные для расчёта критерия Знаков

№	Частота пульса (до тренинга)	Частота пульса (после тренинга)	Разность
1	64	70	6
2	68	70	2
3	65	64	*-1*
4	69	67	*-2*
5	72	80	8
6	75	78	3
7	71	75	4
8	68	66	-2
9	68	68	0
10	70	70	0
11	67	74	7
12	63	72	9

Шаг 3. Найдем $G_{эмп}$ как сумму нетипичных сдвигов:

$G_{эмп} = n_{общ.} - n_0 - n_+ = 12-2-7=3$

Шаг 4. Используя таблицу критических значений, определим $G_{кр}$:

– Находим количество человек в выборке. n=10;

– Определяем $G_{кр}$ справа от значения количества человек в выборке: для p<0,05 $G_{кр}$=1; для p<0,01 $G_{кр}$=0.

Шаг 5. Сравниваем $G_{кр}$ и $G_{эмп}$.

$G_{эмп} = 3 > G_{кр} = 1$

Шаг 6. Вывод: принимается альтернативная гипотеза.

6.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

Варианты									
Вар. 1		**Вар. 2**		**Вар. 3**		**Вар. 4**		**Вар. 5**	
6.9	7.1	15.9	18.0	6.0	8.7	12.2	11.2	20.9	20.8
6.9	6.8	12.4	12.7	9.1	8.2	9.7	13.1	18.1	21.2
5.2	5.4	19.1	16.4	5.8	7.6	14.0	12.4	24.3	20.6
8.0	8.0	17.4	18.2	12.4	6.0	12.8	12.7	22.7	25.2
7.9	7.9	16.2	18.4	9.0	9.4	13.6	14.2	23.5	22.0
5.5	11.3	16.0	18.3	8.5	7.7	13.5	10.9	23.9	19.7
4.6	5.9	13.3	13.6	10.6	8.0	12.0	10.8	19.3	23.4
7.1	7.1	16.9	17.6	7.4	10.1	11.2	12.4	19.1	24.3
5.2	6.3	14.5	14.3	9.7	10.5	12.7	11.1	22.1	20.5
4.3	6.3	15.0	15.9	10.4	9.3	12.3	12.5	21.1	22.5
6.8	7.3	18.3	20.6	9.9	9.9	13.3	12.3	21.5	20.9
4.3	5.0	17.3	21.1	6.6	7.8	14.4	12.9	21.9	21.9
7.7	7.7	14.8	16.6	8.2	11.1	11.6	12.0	23.5	21.5
5.9	6.2	17.0	17.1	13.2	7.1	15.0	11.0	21.4	19.6
7.0	7.2	14.4	19.6	9.7	8.9	11.3	14.5	23.2	19.8
6.5	6.8	12.9	16.4	9.0	9.1	13.6	15.0	22.0	21.6
Вар. 6		**Вар. 7**		**Вар. 8**		**Вар. 9**		**Вар. 10**	
14.3	13.6	10.4	8.7	30.2	31.5	33.2	38.6	36.1	35.7
14.4	16.2	9.6	9.1	30.5	34.5	34.3	40.7	41.4	33.9
14.1	13.3	8.8	9.8	31.8	35.0	34.4	35.1	38.9	41.2
14.5	16.6	11.9	10.9	31.8	33.9	39.0	39.7	37.6	39.3
13.9	16.0	9.3	13.0	32.9	36.2	35.3	38.6	35.7	37.1
14.8	13.2	10.4	10.6	32.4	32.4	39.2	39.5	37.5	41.9
11.5	13.8	10.9	10.5	32.4	32.5	39.4	35.2	38.4	38.5
15.1	13.8	12.1	11.9	31.7	27.5	39.4	35.0	36.8	39.8
15.4	10.8	9.4	8.9	31.4	31.9	33.6	34.9	38.2	36.2
15.0	15.0	10.5	10.0	30.1	37.6	33.7	33.6	40.5	40.8
15.5	14.0	10.6	11.3	31.5	34.3	37.8	40.7	41.2	41.2
14.9	16.5	9.3	10.4	29.9	31.6	35.2	35.7	41.5	38.2
14.7	13.9	12.1	9.3	32.3	36.7	37.0	37.5	39.8	39.9
13.4	14.6	9.6	11.8	30.8	36.2	36.9	36.9	38.1	38.9
13.9	15.1	9.9	9.8	33.1	33.4	37.5	40.3	38.7	42.4
13.5	13.8	10.7	9.6	29.3	30.3	38.3	38.9	34.7	34.9

6.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 7
Критерий χ^2 (хи-квадрат)

7.1 Теоретические сведения

Критерий χ^2 (хи-квадрат) применяется для сравнения распределений объектов двух совокупностей на основе измерений по шкале наименований в двух независимых выборках.

Предположим, что состояние изучаемого свойства (например, выполнение определенного задания) измеряется у каждого объекта по шкале наименований, имеющей только две взаимоисключающие категории (например: выполнено верно — выполнено неверно). По результатам измерения состояния изучаемого свойства у объектов двух выборок составляется четырехклеточная таблица 2×2. (таблица 7.1).

Таблица 7.1

Исходные данные для анализа состояния изучаемого свойства у двух объектов

	Категория 1	Категория 2	
Выборка №1	O_{11}	O_{21}	$O_{11}+O_{21}=n_1$
Выборка №2	O_{12}	O_{22}	$O_{21}+O_{22}=n_2$
	$O_{11}+O_{12}$	$O_{21}+O_{22}$	$n_1+n_2=N$

В этой таблице O_{ij} — число объектов в i-ой выборке, попавших в j-ую категорию по состоянию изучаемого свойства; $i=1,2$ – число выборок; $j=1,2$ – число категорий; N — общее число наблюдений, равное $O_{11} + O_{12} + O_{21} + O_{22}$ или n_1+n_2.

Тогда на основе данных таблицы 2×2 можно проверить нулевую гипотезу о равенстве вероятностей попадания объектов первой и второй совокупностей в первую (вторую) категорию шкалы измерения проверяемого свойства, например, гипотезу о равенстве вероятностей верного выполнения некоторого задания учащимися контрольных и экспериментальных классов.

При проверке нулевых гипотез не обязательно, чтобы значения вероятностей p_1 и p_2 были известны, так как гипотезы только устанавливают между ними некоторые соотношения (равенство, больше или меньше).

Для проверки рассмотренных выше нулевых гипотез по данным таблицы 2×2 (таблица 5 приложения) подсчитывается значение статистики критерия T по следующей общей формуле:

$$T = \frac{N\left(\left|O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right| - \frac{N}{2}\right)^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})} \tag{7.1}$$

где n_1, n_2 — объемы выборок, $N = n_1 + n_2$ — общее число наблюдений.

Проводится проверка гипотезы H_0: $p_1=p_2$ — при альтернативе H_1: $p_1>p_2$. Пусть α — принятый уровень значимости. Тогда значение статистики T, полученное на основе экспериментальных данных, сравнивается с критическим значением статистики T^2, которое определяется по таблице 5 приложения, с одной степенью свободы с учетом выбранного значения α. Если верно неравенство $T<T^2$, то нулевая гипотеза принимается на уровне α. Если данное неравенство не выполняется, то у нас нет достаточных оснований для принятия нулевой гипотезы.

В связи с тем, что замена точного распределения статистики T распределением T^2 с одной степенью свободы дает достаточно хорошее приближение только для больших выборок, применение критерия ограничено некоторыми условиями.

Критерий не рекомендуется использовать, если:

– сумма объемов двух выборок меньше 20;

– хотя бы одна из абсолютных частот в таблице 2×2, составленной на основе экспериментальных данных, меньше 5.

Применение критерия рассмотрим на примере:

Проводился эксперимент, направленный на выявление лучшего из учебников, написанных двумя авторскими коллективами в соответствии с целями обучения математике и содержанием программы I курса. Для проведения эксперимента были выбраны два технических ВУЗа, из одного региона. Студенты одного из них (20 групп) обучались по учебнику № 1, второго (15 групп) - по учебнику №2.

Ответы преподавателей ВУЗов на один из вопросов: «Доступен ли учебник в целом для самостоятельного чтения и помогает ли он усвоить материал, который не объяснялся в учебном процессе (ответ: да — нет.)

Отношение преподавателей к изучаемому свойству учебников измерено по шкале наименований, имеющей две категории: да - нет. Обе выборки преподавателей случайные и независимые.

Ответы 20 преподавателей первого ВУЗа и 15 преподавателей второго распределим на две категории и запишем в форме таблицы 2×2

Таблица 7.2

Мнения преподавателей о качестве двух разных учебников

	Да	Нет	
Выборка №1	$O_{11}=15$	$O_{21}=5$	$O_{11}+O_{21}=n_1=20$
Выборка №2	$O_{12}=7$	$O_{22}=8$	$O_{21}+O_{22}=n_2=15$
	$O_{11}+O_{12}=22$	$O_{21}+O_{22}=13$	$n_1+n_2=N=35$

Все значения в таблице 7.2 не меньше 5, поэтому в соответствии с условиями использования критерия T^2 подсчет статистики критерия производится по формуле (7.1).

$$T=\frac{35\left(\left|15\times 8-7\times 5\right|-\dfrac{35}{2}\right)^2}{20\times 15(15+7)\times(5+8)}=1{,}86$$

По таблице из приложения для одной степени свободы (k=l) и уровня значимости α=0,05 найдем $T_{критич}$ = 3,84. Отсюда верно неравенство $T<T_{критич}$ (1,86<3,84). Согласно правилу принятия решений для критерия T^2, полученный результат не дает достаточных оснований для отклонения нулевой гипотезы, т. е. результаты проведенного опроса преподавателей двух экспериментальных районов не дают достаточных оснований для отклонения предположения об одинаковой доступности учебников №1 и 2 для самостоятельного чтения учащимися.

Применение критерия хи-квадрат возможно и в том случае, когда объекты двух выборок из двух совокупностей по состоянию изучаемого свойства распределяются более чем на две категории. Например, студенты экспериментальных и контрольных групп распределяются на четыре категории в соответствии с отметками (в баллах: 2, 3, 4, 5), полученными ими за выполнение некоторой контрольной работы.

Результаты измерения состояния изучаемого свойства у объектов каждой выборки распределяются на *С* категорий. На основе этих данных составляется таблица 2×*С*, в которой два ряда (по числу рассматриваемых совокупностей) и *С* колонок (по числу различных категорий состояния изучаемого свойства, принятых в исследовании).

Таблица 7.3

Исходные данные для анализа состояния изучаемого свойства

у двух объектов по нескольким категориям

	Категор.1	Категор.2	…	Категор.i	…	Категор.c	
Выб. №1	O_{11}	O_{21}		O_{1i}	…	O_{1c}	n_1
Выб. №2	O_{12}	O_{22}	…	O_{2i}	…	O_{2c}	n_2
	$O_{11}+O_{12}$	$O_{21}+O_{22}$	…	$O_{1i}+O_{1i}$	…	$O_{1c}+O_{1c}$	$N=n_1+n_2$

На основе данных таблицы 7.3 можно проверить нулевую гипотезу о равенстве вероятностей попадания объектов первой и второй совокупностей в каждую из *i* (*i*=*l*, 2, ..., С) категорий, т. е. проверить выполнение всех следующих равенств: $p_{11}= p_{21}$, $p_{12} = p_{22}$, $p_{1c} = p_{2c}$. Возможна, например, проверка гипотезы о равенстве вероятностей получения отметок «5», «4», «3» и «2» за выполнение учащимися контрольных и экспериментальных классов некоторого задания.

Для проверки нулевой гипотезы с помощью критерия с^2 на основе данных таблицы 2×С подсчитывается значение статистики критерия *Т* по формуле(7.2):

$$T = \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i=1}^{C}\frac{(n_1 O_{2i} - n_2 O_{2i})^2}{O_{1i}+O_{2i}} \tag{7.2}$$

где n_1 и n_2 — объемы выборок.

Значение *Т,* полученное на основе экспериментальных данных, сравнивается с критическим значением T_{1-a}, которое определяется по таблице с *k*=*С*—1 степенью свободы с учетом выбранного уровня значимости *а*. При выполнении неравенства $T > T^2$ нулевая гипотеза отклоняется на уровне α и принимается альтернативная гипотеза. Это означает, что распределение объектов на C категорий по состоянию изучаемого свойства различно в двух рассматриваемых совокупностях.

В качестве примера. рассмотрим методику сравнения результатов письменной работы, проверявшей усвоение одного из разделов курса студентами первого и второго ВУЗов.

Методом случайного отбора из студентов первого ВУЗа, писавших работу, была составлена выборка объемом 50 человек, из студентов второго также — выборка объемом 50 человек. В соответствии со специально разработанными критериями оценки выполнения работы каждый студент мог попасть в одну из четырех категорий: плохо, посредственно, хорошо, отлично. Результаты выполнения работы двумя выборками испытуемых используем для проверки гипотезы о том, что учебник № 1 способствует лучшему усвоению проверяемого раздела курса, т. е. студенты первого экспериментального ВУЗа в среднем будут получать более высокие оценки, чем студенты второго.

Результаты выполнения работы студентами обеих выборок запишем в виде таблицы 2×4 (таблица 7.4).

Таблица 7.4

Данные выполнения контрольной, классифицированные на 4 категории

	Плохо	Посредственно	Хорошо	Отлично	
Выб. №1	$O_{11}=3$	$O_{21}=19$	$O_{31}=18$	$O_{41}=10$	$n_1=50$
Выб. №2	$O_{12}=9$	$O_{22}=24$	$O_{32}=12$	$O_{42}=5$	$n_2=50$
	$O_{11}+O_{12}=12$	$O_{21}+O_{22}=43$	$O_{31}+O_{32}=30$	$O_{41}+O_{42}=15$	$N=100$

В соответствии с условиями использования критерия c^2 подсчет статистики критерия производится по корректированной формуле (2).

$$T=\frac{1}{n_1n_2}\left[\frac{(n_1O_{21}-n_2O_{11})^2}{O_{11}+O_{21}}+\frac{(n_1O_{22}\_n_2O_{22})^2}{O_{12}+O_{22}}+\frac{(n_1O_{23}-n_2O_{13})^2}{O_{13}+O_{23}}+\frac{(n_1O_{14}-n_2O_{14})^2}{O_{14}+O_{24}}\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(4+9{,}3+19{,}2+26{,}7)=6{,}45$$

В соответствии с условиями применения двустороннего критерия хи-квадрат (T^2) по таблице 5 из приложения для одной степени свободы (k=4-l=3) и уровня значимости α=0,05 найдем $T_{k=3}$ $=T_{критич}$ = 7,815. Отсюда верно неравенство $T_{наблюд}<T_{критич}$ (6,45<7,815). Согласно правилу принятия решений для критерия T^2, полученный результат не дает достаточных оснований для отклонения нулевой гипотезы.

7.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

7.2.1 Качество работы двух фотомастерских оценивалось потребителями тремя уровнями: плохо, удовлетворительно, хорошо. Получены следующие оценки:

	Плохо	Удовлетворительно	Хорошо
Мастерская №3	3	15	12
Мастерская №4	4	13	9

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимо ли качество работы этих мастерских?

7.2.2 Твёрдость отливок от двух поставщиков оценивалась при входном контроле. Получены следующие данные:

	До 180НВ	180…200НВ	200…220НВ	220…240НВ	∑
Поставщик Х	8	21	32	33	
Поставщик У	12	23	39	30	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимо ли качество работы этих поставщиков?

7.2.3 Твёрдость поверхности деталей из стали 45 и стали 40Х после поверхностной закалки составила

	До 52HRC	52…53 HRC	54…55HRC	56…57HRC	∑
Сталь 45	5	13	17	15	
Сталь 40Х	9	18	29	9	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты термообработки этих материалов?

7.2.4

Визажистами	Не довольны	Удовлетвор ены	Считают хорошими	Считают отличными	∑
Мартынова	4	6	9	14	
Николаева	2	7	10	18	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты их работы?

7.2.5

Визажистами	Не довольны	Удовлетвор ены	Считают хорошими	Считают отличными	∑
Валей	5	8	13	22	∑
Таней	3	8	5	4	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты их работы?

7.2.6

Визажистами	Не довольны	Удовлетвор ены	Считают хорошими	Считают отличными	∑
Олей	2	3	5	5	∑
Галей	1	6	8	10	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты их работы?

7.2.7

Визажистами	Не довольны	Удовлетвор ены	Считают хорошими	Считают отличными	∑
Светой	1	3	8	12	∑
Надей	4	5	5	6	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты их работы?

7.2.8

Визажистами	Не довольны	Удовлетвор ены	Считают хорошими	Считают отличными	∑
Оксаной	6	7	13	19	∑
Алёной	5	7	12	14	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли результаты их работы?

7.2.9

Автомобиля ми	Не довольны	Удовлетвор ены	Очень удовлетворены	Считают отличными	∑
ВАЗ2107	8	9	8	6	
ВАЗ2109	3	8	20	15	
∑					

С помощью критерия хи-квадрат определить, сопоставимы ли их оценки?

7.2.10

Автомобиля ми	Не довольны	Удовлетвор ены	Очень удовлетворены	Считают отличными	∑
ВАЗ2105	6	19	7	2	
ВАЗ21015	6	13	10	12	
∑					

7.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 8
Критерий Вилкоксона (*T*-критерий)

8.1 Теоретические сведения

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в *двух* разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность. С его помощью можно определить, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

T-критерий Вилкоксона используется для решения тех же задач, что и *t*-критерий Стьюдента для связанных выборок. Отличие состоит в том, что *T*-критерий Вилкоксона можно применять для порядковых данных, а исходные распределения не обязательно должны быть нормальными.

T – критерий Вилкоксона применим в тех случаях, когда признаки измерены, по крайней мере, по шкале порядка, и сдвиги между вторым и первым замерами тоже могут быть упорядочены. Для этого они должны варьироваться в достаточно широком диапазоне. В принципе, можно применять *T* - критерий Вилкоксона и в тех случаях, когда сдвиги принимают только три значения: -1, 0 и +1, но тогда *T* - критерий вряд ли добавит что-нибудь новое к тем выводам, которые можно было бы получить с помощью критерия Знаков. Вот если сдвиги изменяются, скажем, от -30 до +45, тогда имеет смысл их ранжировать и потом суммировать ранги.

Суть метода состоит в том, что мы сопоставляем выраженность сдвигов в том и ином направлениях по абсолютной величине. Для этого мы сначала ранжируем все абсолютные величины сдвигов, а потом суммируем ранги. Если сдвиги в положительную и в отрицательную сторону происходят случайно, то суммы рангов абсолютных значений их будут примерно равны. Если же интенсивность сдвига в одном из направлений перевешивает, то сумма рангов абсолютных значений сдвигов в противоположную сторону будет значительно ниже, чем это могло бы быть при случайных изменениях.

Первоначально исходим из предположения о том, что типичным сдвигом будет сдвиг в более часто встречающемся направлении, а нетипичным, или редким, сдвигом - сдвиг в более редко встречающемся направлении.

Гипотезы *T* – критерия Вилкоксона

H_0**:** Интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1**:** Интенсивность сдвигов в типичном направлении превышает интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Ограничения в применении *T* – критерия Вилкоксона:

– Минимальное количество испытуемых, прошедших измерения в двух условиях - 5 человек. Максимальное количество испытуемых - 50 человек, что диктуется верхней границей имеющихся таблиц.

– Нулевые сдвиги из рассмотрения исключаются, и количество наблюдений *n* уменьшается на количество этих нулевых сдвигов (при условии, если флажок «Учитывать нулевой сдвиг?» не установлен). Можно обойти это ограничение (установив флажок «Учитывать нулевой сдвиг?») сформулировав гипотезы, включающие отсутствие изменений, например: «Сдвиг в сторону увеличения значений превышает сдвиг в сторону уменьшения значений и тенденцию сохранения их на прежнем уровне».

Формула имеет вид: $T_{эмп.} = \Sigma Rr$, где ΣRr – сумма нетипичных рангов.

Рассмотрим пример: На тренажёре, имитирующем кабину самолета, изменили эргономическую среду. Для выполнения определенной задачи летчик раньше тратил одно количество секунд, а в новой среде он на выполнение тех же действий тратит другое количество времени. Таким образом, были сделаны замеры у 10 летчиков. Определить достоверность преобладания сдвига значений в направлении одной из сторон при условии, что результаты второго среза обусловлены исключительно изменением эргономической среды.

Формулируются статистические гипотезы:

H_0: преобладание сдвигов между начальными и конечными показателями в одном из направлений значимо не отличается от нуля.

H_1: преобладание сдвигов между начальными и конечными показателями в одном из направлений значимо отличается от нуля.

Определяются величины сдвигов между начальными и конечными показателями, затем они переводятся в абсолютные значения и ранжируются по принципу «меньшему значению – меньший ранг». Затем выделяются нетипичные (чья направленность отличается от большинства) ранги и подсчитывается их сумма. Данные сравнений сведены в таблицу 8.1.

Таблица 8.1

Данные сравнений

N п/п	Начальные показатели	Конечные показатели	Разность показателей (*d*)	Абсолютное значение разности	Ранг разности
1	52	51	1	1	1
2	55	60	-5	5	**4,5**
3	47	41	6	6	6,5
4	62	68	-6	6	**6,5**
5	58	58	0	0	0
6	59	55	4	4	2,5
7	44	40	4	4	2,5
8	57	49	8	8	8
9	61	52	9	9	9
10	63	68	-5	5	**4,5**

Если одно или несколько значений *d* равны 0, как в нашем примере. в то им присваивается нулевой ранг (в таблице примера нетипичные ранги выделены жирным шрифтом). Сумма нетипичных рангов равна искомому эмпирическому значению. $T_{эмп}$. = 4,5+6,5+4,5=15,5.

Для *T*-критерия Вилкоксона правило принятия-отвержения нулевой гипотезы следующее: $T_{эмп.} \leq T_{кр.}$. $\text{Т}_{\text{кр.}}$ определяется из таблицы приложения. Если данное условие выполняется, то принимается гипотеза H_1.

Следует дополнительно добавить, что этот критерий может быть односторонним (если направление сдвигов предсказывается) или двусторонним (если мы не предсказываем направление сдвигов). Уровни значимости для одностороннего и двустороннего критериев различны.

В нашем случае мы имеем дело с двусторонним критерием, так как предварительно не предсказывали направление различий. Для n = 10 критическое значение при $p \leq 0{,}05$ составляет 8. То есть $T_{эмп.} > T_{кр.}$ ($p \leq 0{,}05$) – Принимается гипотеза H_0! Мы можем констатировать, что достоверность преобладания сдвигов ни в одном из направлений не установлена. Возможно, что мы могли бы опровергнуть нулевую гипотезу, если бы увеличили количество наблюдений.

8.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

8.2.1 У 20 пациентов сделаны замеры частоты сердечных сокращений до и после приёма некоторого препарата, действие которого направлено на снижение пульса.

n	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)	*n*	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)
1	85	80	11	83	80
2	80	76	12	82	76
3	84	85	13	83	85
4	88	85	14	88	85
5	94	80	15	89	80
6	95	88	16	95	88
7	83	79	17	83	79
8	80	80	18	80	80
9	87	78	19	87	78
10	89	78	20	80	78

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность действия данного препарата

8.2.2 Группа из 15 человек тестировалась на знание правил дорожного движения до и после прослушивания теоретического курса ПДД. Полученные результаты представлены в таблице

N курсанта	Начальные показатели (баллов)	Конечные показатели (баллов)	N курсанта	Начальные показатели (баллов)	Конечные показатели (баллов)
1	14	18	9	17	19
2	17	19	10	19	19
3	20	19	11	16	19
4	16	19	12	16	18
5	16	18	13	18	19
6	16	16	14	18	20
7	19	18	15	15	18
8	17	19			

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность теоретического обучения.

8.2.3 Группа принимаемых на работу тестировалась на знание правил техники безопасности до и после прослушивания теоретического курса. Полученные результаты представлены в таблице

N курсанта	Начальные показатели (баллов)	Конечные показатели (баллов)	N курсанта	Начальные показатели (баллов)	Конечные показатели (баллов)
1	14	17	9	17	19
2	17	19	10	19	16
3	20	19	11	16	19
4	16	19	12	16	18
5	16	17	13	18	19
6	16	16	14	18	20
7	19	16	15	15	18
8	17	19	16	16	17

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность теоретического обучения.

8.2.4 Образцы из низкоуглеродистой стали испытывались на растяжение при комнатной температуре и при температуре 100°С. Полученные результаты представлены в таблице

n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)	n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)
1	15	16	11	15	16
2	15	15	12	15	15
3	14	17	13	14	17
4	17	16	14	17	16
5	16	17	15	16	17
6	14	16	16	14	16
7	13	17	17	13	17
8	15	16	18	15	16
9	16	17	19	16	17
10	14	16	20	14	16

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность влияния нагрева на удлинение образцов.

8.2.5 Образцы из низкоуглеродистой стали испытывались на сжатие при комнатной температуре и при температуре 100°С. Полученные результаты представлены в таблице

n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)	n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)
1	2	3	4	5	6
1	10	12	11	10	12
2	12	13	12	12	13
3	13	12	13	13	12
4	11	14	14	11	13
5	10	13	15	10	12
6	13	14	16	13	14
1	2	3	4	5	6
7	12	13	17	12	12
8	10	13	18	10	12
9	11	10	19	11	10
10	14	15	20	14	15

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность влияния нагрева на сжатие образцов.

8.2.6 Со студентами, поступившими на первый курс, проведено входное тестирование по физике, в результате которого установлено, что 16 студентов подготовлены недостаточно. С ними решено провести дополнительные занятия и завершить их новым тестированием. Полученные результаты представлены в таблице

N студента	Начальные показатели (баллов)	Показатели после доп.занятий(баллов)	N студента	Начальные показатели (баллов)	Показатели после доп.занятий(баллов)
1	18	20	9	17	19
2	19	21	10	19	16
3	20	19	11	18	19
4	16	19	12	17	18
5	17	18	13	18	19
6	17	17	14	18	20
7	19	20	15	17	18
8	16	19	16	16	18

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность дополнительной подготовки.

8.2.7 Образцы из низкоуглеродистой стали испытывались на сжатие при комнатной температуре и при температуре 100^{o}С. Полученные результаты представлены в таблице

n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)	n	Начальные показатели пластичности (δ,%)	Конечные показатели пластичности (δ,%)
1	19	22	11	19	24
2	17	20	12	17	20
3	20	21	13	16	20
4	23	20	14	18	21
5	22	21	15	18	21
6	23	17	16	16	21
7	16	21	17	19	24
8	20	18	18	19	21
9	22	21	19	20	21
10	18	22	20	19	25

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность влияния нагрева на сжатие образцов.

8.2.8 Со студентами, поступившими на первый курс, проведено входное тестирование по математике, в результате которого установлено, что 16 студентов подготовлены недостаточно. С ними решено провести дополнительные занятия и завершить их новым тестированием. Полученные результаты представлены в таблице

N студента	Начальные показатели (баллов)	Показатели после доп.занятий(баллов)	N студента	Начальные показатели (баллов)	Показатели после доп.занятий(баллов)
1	19	20	9	23	20
2	19	24	10	17	19
3	23	21	11	21	21
4	20	21	12	22	19
5	20	24	13	24	25
6	19	22	14	20	21
7	24	22	15	19	18
8	22	21	16	21	20

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность дополнительной подготовки.

8.2.9 У 10 пациентов сделаны замеры частоты сердечных сокращений до и после приёма некоторого препарата, действие которого направлено на снижение пульса.

n	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)	*n*	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)
1	85	80	11	83	80
2	80	76	12	82	76
3	84	85	13	83	85
4	88	85	14	88	85
5	94	80	15	89	80
6	95	88	16	95	88
7	83	79	17	83	79
8	80	80	1	80	80
9	87	78	19	87	78
10	89	78	20	80	78

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность действия данного препарата.

8.2.10 У 20 пациентов сделаны замеры частоты сердечных сокращений до и после приёма некоторого препарата, действие которого направлено на снижение пульса.

n	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)	*n*	Начальные показатели (уд./мин.)	Конечные показатели (уд./мин.)
1	70	60	11	68	68
2	67	66	12	70	68
3	69	59	13	71	65
4	66	68	14	68	63
5	66	63	15	67	65
6	66	66	16	68	66
7	67	69	17	70	66
8	66	64	1	65	68
9	73	64	19	68	70
10	69	59	20	64	72

С помощью критерия Вилкоксона определить эффективность действия данного препарата.

8.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 9
Критерий Манна-Уитни (*U*-критерий)

9.1 Теоретические сведения

U-критерий Манна-Уитни используется для оценки различий между двумя малыми выборками ($n_1, n_2 \geq 3$ или $n_1=2$, $n_2 \geq 5$) по уровню количественно измеряемого признака. При этом первой выборкой принято считать ту, где значение признака больше.

Нулевая гипотеза H_0: уровень признака во второй выборке не ниже уровня признака в первой выборке; альтернативная гипотеза – H_1: уровень признака во второй выборке ниже уровня признака в первой выборке.

Рассмотрим алгоритм применения *U*-критерия Манна-Уитни:

- Перенести все данные испытуемых на индивидуальные карточки, пометив карточки 1-й выборки одним цветом, а 2-й – другим.
- Разложить все карточки в единый ряд по степени возрастания признака и проранжировать в таком порядке.
- Вновь разложить карточки по цвету на две группы.
- Подсчитать сумму рангов отдельно по группам и проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной.
- Определить большую из двух ранговых сумм T_x.
- Вычислить эмпирическое значение *U*:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_x(n_x+1)}{2} - T_x, \qquad (9.1)$$

где n_i - количество испытуемых в i выборке (i = 1,2); n_x - количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

Задать уровень значимости α и, используя таблицу П7, приведённую в приложении, определить критическое значение $U_{кр}(\alpha)$. Если $U_{эмп.} \geq U_{кр.}$, то H_0 на выбранном уровне значимости принимается. Рассмотрим пример: Рейтинг по математике в подгруппах дал следующие результаты по 10-балльной шкале (таблица 9.1).Определить, превосходят ли студенты второй подгруппы по уровню подготовки по математике студентов первой подгруппы.

Таблица 9.1

Результаты рейтинга

№ студента \ № подгр.	Первая подгруппа (баллы)	Вторая подгруппа (баллы)
1	9	5
2	7	10
3	7	7
4	8	8
5	6	8
6	4	4
7	4	6
8	8	8
9	6	8
10	6	9
11	5	7
12	-	10

Сравнение результатов показывает, что баллы, полученный за рейтинг, во второй подгруппе несколько выше, поэтому первой будем считать выборку результатов второй подгруппы (таблица 9.2).

Таблица 9.2

Определение рангов

Вторая подгруппа (баллы)	Ранг	Первая подгруппа (баллы)	Ранг
10	22,5		
10	22,5	9	20.5
9	20.5	8	16.5
8	16.5	8	16.5
8	16.5	7	11.5
8	16.5	7	11.5
8	16.5	6	7.5
7	11.5	6	7.5
7	11.5	6	7.5
6	7.5	5	4.5
5	4.5	4	2
4	2	4	2
Сумма:	168.5	Сумма:	107.5

Таким образом, нам требуется определить, можно ли считать имеющуюся разницу между баллами существенной. Если можно, то это будет означать, что вторая подгруппа имеет более качественные знания по математике. В противном случае, на выбранном уровне значимости различие окажется несущественным.

Для оценки различий между двумя малыми выборками (в данном примере их объёмы равны: n_1=12, n_2=11) используем критерий Манна-Уитни. Про ранжируем представленную таблицу и результаты представим в таблице 9.3:

Таблица 9.3

Таблица рангов

Баллы 2	4			5		6				7	7
Баллы 1		4	4		5		6	6	6		
Ранг	2	2	2	4,5	4,5	7,5	7,5	7,5	7,5	11,5	11,5
Баллы 2			8	8	8	8				10	10
Баллы 1	7	7					8	8	9		
Ранг	11,5	11,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	20,5	22,5	22,5

При ранжировании объединяем две выборки в одну. Ранги присваиваются в порядке возрастания значения измеряемой величины, т.е. наименьшему рангу соответствует наименьший балл. Заметим, что в случае совпадения баллов для нескольких студентов ранг такого балла следует считать, как среднее арифметическое тех позиций, которые занимают данные баллы при их расположении в порядке возрастания. Например, 4 балла получили 3 студента. Значит, первые 3 позиции в расположении займёт балл, равный 4. Поэтому ранг для 4 баллов – это среднее арифметическое для позиций 1, 2 и 3,

или: $\frac{1+2+3}{3}=2$. Аналогично рассуждаем при вычислении ранга для балла, равного 5. Такой балл получили двое студентов. Значит, при распределении по возрастанию первые три позиции занимает балл, равный 4, а четвёртую и пятую позиции займёт балл, равный 5. Поэтому его ранг будет равен среднему арифметическому между числами 4 и 5, т.е. 4.5. Используя предложенный принцип ранжирования, получим таблицу рангов (таблица 9.3).

Заметим, что выбор среднего арифметического в качестве ранга применяется при любом ранжировании, в том числе необходимого и для вычисления других критериев достоверности или же коэффициента корреляции Спирмена.

Чтобы использовать критерий Манна-Уитни, рассчитаем суммы рангов рассматриваемых выборок. Сумма для первой выборки равна 168,5, для второй – 107,5. Обозначим наибольшую из этих сумм через T_x (T_x=168.5). Среди объёмов

n_1 и n_2 выборок наибольший обозначим n_x. Этих данных достаточно, чтобы воспользоваться формулой расчёта эмпирического значения критерия:

$$U_{эмп.} = n_1 n_2 + \frac{n_x(n_x+1)}{2} - T_x \qquad U_{эмп.} = 11 \times 12 + \frac{12(12+1)}{2} - 168{,}5 = 41{,}5$$

$$U_{кр.(0,05)} = 33$$

$$U_{кр.} = 33 \le 41.5 = U_{эмп..}$$

Следовательно, различия в уровне знаний по математике среди студентов можно считать несущественными.

9.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

9.2.1 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни достижения ведущих российских и американских теннисисток, исходя из числа побед на различных турнирах 2015 года

Россия	Число побед	США	Число побед
Шарапова	12	С.Уильямс	15
Кириленко	8	В.Уильямс	9
Макарова	6	Киз	4
Веснина	5	Викери	3
Павлюченкова	3	В.Таунсенд	2
Чекветадзе	2	М.Таунсенд	1
Клейбанова	2	Харклроуд	1

9.2.2 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни достижения ведущих российских и испанских футбольных бомбардиров, исходя из числа забитых голов в национальных чемпионатах 2015/16 года

Россия	Число голов	Испания	Число голов
Фёдор Смолов	14	Луис Суарес	22
Квинси Промес	14	Кришт. Роналду	21
Халк	13	Лионель Месси	15
Артём Дзюба	12	Карим Бензема	13
Ахмед Муса	10	Неймар	13
Евгений Луценко	9	Антуан Гризманн	10
Байе Умар Ниассе	8	Гарет Бэйл	8
Л. Мельгарехо	8	Аритц Адурис	7
Мацей Рыбусь	8	Борха Гонсалес	7
Алекс. Самедов	8	Рубен Кастро	6

9.2.3 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Енисей	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Капризов Кир.	15,2	Опарин Мих.	12,0
Ртищев Никита	13,2	Филиппов Алекс.	11,5
Толчинский Сер	13,2	Клещенко Вал.	10,7
Вей Линден	12,7	Ганус Данил	10,1
Карнаухов Пав.	12,7	Сагуткин Конст.	10,0
Попов Алекс.	12,6	Гарбуз Роман	9,3
Кемпе Марио	12,3	Бутаев Ростисл.	9,1
Соркин Максим	11,6	Воробьёв Олег	9,0
Секач Иржи	10,7	Гасанов Шамиль	9,0
Слепышев Ант.	10,2	Зотов Алексей	8,9

9.2.4 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих баскетболистов российских и испанских команд в чемпионате Европы 2019 года

УНИКС		Реал	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вангелис Манц.	18.8	Фредетт Джиммер	15.5
Джордан Теодор	15.3	Пападакис Костас	13.3
Сергеев Павел	12.8	Калатес Ник	10.7
Смит Джамар	10.6	Райс Тайрес	9.9
Колесников Евг.	9.8	Паппас Никос	8.6
Макколум Эррик	8.5	Браун Рион	8.6
Кощеев Андрей	7.4	Дешон Томас	8.5
Лиходей Валерий	5.9	Джонсон Уэсли	7.8
Уилсон Джамил	5.3	Папапетру Яннис	6.8

9.2.5 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих баскетболистов российских и команд в чемпионате России 2019 года

УНИКС		Химки	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вангелис Манц.	18.8	Швед Алексей	13.7
Джордан Теодор	15.3	Карасев Сергей	13.3
Сергеев Павел	12.8	Моня Сергей	12.7
Смит Джамар	10.6	Мозгов Тимофей	11.9
Колесников Евг.	9.8	Эванс Джереми	9.6
Макколум Эррик	8.5	Гилл Энтони	8.8
Кощеев Андрей	7.4	Букер Девин	8.5
Лиходей Валерий	5.9	Йович Стефан	7.8
Уилсон Джамил	5.3	Губанов Петр	6.8

9.2.6 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

СКА Санкт-Петербург		ЦСКА	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Барабанов Алекс.	14,1	Капризов Кирилл	15,2
Бурдасов Антон	12,9	Ртищев Никита	13,2
Глотов Василий	11,3	Толчинский Сергей	13,2
Дергачёв Алекс.	11,0	Вей Линден	12,7
Каблуков Илья	10,6	Карнаухов Павел	12,7
Марченко Кирилл	10,5	Попов Александр	12,6
Морозов Иван	10,4	Кемпе Марио	12,3
Плотников Серг.	10,2	Соркин Максим	11,6
Подколзин Вас.	10,0	Секач Иржи	10,7
Ткачёв Владимир.	8,8	Слепышев Антон	10,2

9.2.7 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Автомобилист	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Капризов Кирилл	15,2	Белоусов Георг.	13,8
Ртищев Никита	13,2	Гареев Артём	12,9
Толчинский Серг.	13,2	Голышев Анат.	12,5
Вей Линден	12,7	Дацюк Павел	12,4
Карнаухов Павел	12,7	Доус Найджел	10,3
Попов Александр	12,6	Захаров Илья	10,0
Кемпе Марио	12,3	Кучерявенко Ал.	9,8
Соркин Максим	11,6	Литовсенко Вл	9,5
Секач Иржи	10,7	Мозер Евгений	8,9
Слепышев Антон	10,2	Брукс Мейсек	7,3

9.2.8 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Акинфеев Игорь	17,6	Бабурин Егор	14,7
Набабкин Кир.	14,0	Козлов Алекс.	14,1
Фернандес Мар.	14,0	Логашов Арс.	13,2
Щенников Геор.	12,6	Еременко Роман	12,1
Бийол Яка	11,4	Хаджикадунич	10,9
Влашич Никола	10,3	Чернов Евг.	10,6
Дзагоев Алан	8,7	Чистяков Дм.	10,2
Кучаев Конст.	8,7	Норманн М.	9,9
Обляков Иван	8,1	Байрамян Хорен	9,4
Чалов Фёдор	8,0	Глебов Данил	7,5

9.2.9 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

Зенит		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Кержаков Мих.	14,6	Бабурин Егор	14,7
Дзюба Артём	13,7	Козлов Алекс.	14,1
Иванович Бр.	12,7	Логашов Арс.	13,2
Караваев Вяч.	11,7	Еременко Роман	12,1
Азмун Сердар	11,6	Хаджикадунич	10,9
Сантос Дуглас	10,4	Чернов Евг.	10,6
Мевля Миха	10,3	Чистяков Дм.	10,2
Маммана Эмм.	8,8	Норманн М.	9,9
Смольников Иг.	7,7	Байрамян Хорен	9,4
Ракицкий Яр.	7,6	Глебов Данил	7,5

9.2.10 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

Рубин		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Дюпин Юрий	14,0	Бабурин Егор	14,7
Денисов Вит.	12,6	Козлов Алекс.	14,1
Башкиров Евг.	12,4	Логашов Арс.	13,2
Давиташвили З.	10,6	Еременко Роман	12,1
Данченко Олег	10,5	Хаджикадунич	10,9
Закиров Камиль	10,0	Чернов Евг.	10,6
Зуев Алекс.	9,9	Чистяков Дм.	10,2
Кварацхелия Х.	9,9	Норманн М.	9,9
Коновалов Иг.	9,9	Байрамян Хорен	9,4
Могилевец Пав.	5,5	Глебов Данил	7,5

9.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 10
Критерий Крускала-Уоллиса

10.1 Теоретические сведения

Ранговый критерий Крускала-Уоллиса для оценки разностей между c медианами ($c > 2$) представляет собой обобщение рангового критерия Вилкоксона для двух независимых выборок. Таким образом, критерий Крускала-Уоллиса является непараметрической альтернативой F-критерию в однофакторном дисперсионном анализе, аналогично тому, как критерий Вилкоксона представляет собой непараметрическую альтернативу t-критерию, использующему суммарную дисперсию при сравнении двух независимых выборок.

Для применения критерия Крускала-Уоллиса должны выполняться следующие условия.

– Все c выборок случайно и независимо друг от друга извлекаются из соответствующих генеральных совокупностей.
– Анализируемая переменная является непрерывной.
– Наблюдения допускают ранжирование как внутри, так и между группами.
– Все c генеральных совокупностей имеют одинаковую изменчивость.
– Все c генеральных совокупностей имеют одинаковый вид.

Если выполняются условия, необходимые для применения F-критерия в однофакторном дисперсионном анализе, критерий Крускала-Уоллиса обладает той же мощностью.

Ранговый критерий Крускала-Уоллиса применяется для проверки гипотезы, что k независимых выборок извлечены из генеральных совокупностей, имеющих одинаковые медианы. Иначе говоря, нулевая и альтернативная гипотезы формулируются следующим образом:

H_0: M_1 M_2 = … =M_k

H_1: не все M_j (j = 1, 2, …, k) являются одинаковыми

Для этого необходимо знать ранги, вычисленные по всем выборкам, а k генеральных совокупностей, из которых они извлечены, должны иметь одинаковые изменчивость и вид. Для того, чтобы применить критерий Крускала-Уоллиса, сначала необходимо заменить наблюдения в k выборках их объединенными рангами. При этом первый ранг соответствует наименьшему наблюдению, а ранг n (последний суммарный) — наибольшему ($n = n_1 + n_2 + ... + n_k$). Если некоторые значения повторяются, им присваивается среднее значение их рангов.

Критерий Крускала-Уоллиса является альтернативой F-критерию в однофакторном дисперсионном анализе. H-статистика, применяемая в критерии Крускала-Уоллиса, аналогична величине межгрупповой вариации, по которой вычисляется F-статистика. Вместо сравнения средних значений $\bar{X}_j$ всех k групп с общим средним значением $\bar{\bar{X}}$, в критерии Крускала-Уоллиса средние ранги каждой из c групп сравниваются с общим рангом, вычисленным на основе всех n наблюдений. Если существует статистически значимый эффект эксперимента, средние ранги каждой группы будут значительно отличаться друг от друга и от общего ранга. При возведении этих разностей в квадрат H-статистика увеличивается. С другой стороны, если эффект эксперимента не наблюдается, статистика H теоретически должна быть равной нулю. Однако на практике вследствие случайных изменений статистика H будет не нулевой, но достаточно малой.

Критерий Крускала-Уоллиса для разностей между k медианами:

$$H = \left[\frac{12}{n(n+1)}\right]\sum_{n=1}^{k}\frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1) \qquad (10.1)$$

где: n — общее количество наблюдений в объединенных выборках; n_j — количество наблюдений в j-й выборке ($j = 1, 2, ... , \boldsymbol{k}$); T_j — сумма рангов j-й выборки.

При достаточно большом объеме выборок (больше пяти) H-статистику можно аппроксимировать χ^2-распределением с $\boldsymbol{k} - 1$ степенями свободы. Таком образом, при заданном уровне значимости α решающее правило формулируется так: гипотеза H_0 отклоняется, если $H > \chi_{кр}^2$, в противном случае гипотеза H_0 не отклоняется.

Критические значения χ^2-распределения определяются по таблице П8 приложения

Пример: необходимо оценить прочности парашютов в зависимости от поставщика синтетических волокон с использованием критерия Крускала-Уоллиса.

Если прочность парашютов не является нормально распределенной случайной величиной, для оценки различий между медианами четырех генеральных совокупностей можно применить непараметрический критерий Крускала-Уоллиса. Нулевая гипотеза заключается в том, что прочность всех парашютов одинакова: H_0: $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$. Альтернативная гипотеза утверждает, что, по крайней мере, один поставщик отличается от других: H_i: не все M_j (j = 1, 2, 3, 4) являются одинаковыми. Результаты эксперимента, ранги и вычисления приведены в таблицах 10.1 и 10.2.

Таблица 10.1

Прочность и ранги парашютов, сшитых из синтетической ткани, приобретенной у четырех разных поставщиков

Показатели прочности парашютов							
Поставщик 1		Поставщик 2		Поставщик 3		Поставщик 4	
Знач.	Ранг	Знач.	Ранг	Знач.	Ранг	Знач.	Ранг
18,5	4	**26,3**	20	20,6	8	25,4	19
24	13,5	25,3	18	25,2	17	**19,9**	5,5
17,2	1	**24**	13,5	20,8	9	22,6	11
19,9	5,5	21,2	10	24,7	16	17,5	2
18	3	24,5	15	22,9	12	20,4	7
Σ=	27,0	Σ=	76,5	Σ=	62,0	Σ=	44,5

Таблица 10.2

Упорядоченные значения прочности и рангов

Значен.	17,2	17,5	18	18,5	19,9	19,9	20,4	20,6	20,8	21,2
Ранги	1	2	3	4	5,5	5,5	7	8	9	10
Значен.	22,6	22,9	24	24	24,5	24,7	25,2	25,3	25,4	26,3
Ранги	11	12	13,5	13,5	15	16	17	18	19	20

В процессе преобразования 20 показателей прочности в объединенные ранги, выясняется, что третий парашют, произведенный из синтетического волокна первого поставщика, имеет наименьшую прочность, равную 17,2. Он получает ранг 1. Четвертый парашют, произведенный из синтетического волокна первого поставщика, и второй парашют, сотканный из волокон четвертого поставщика, имеют одинаковую прочность, равную 19,9. Поскольку им соответствуют ранги 5 и 6, обоим парашютам присваивается ранг 5,5, равный среднему значению рангов 5 и 6. И, наконец, ранг 20 присваивается первому парашюту, сотканному из волокон второго поставщика, поскольку величина 26,3 является наибольшей. После присвоения рангов вычисляется их сумма в каждой группе:

$T_1 = 27{,}0$; $T_2 = 76{,}5$; $T_3 = 62{,}0$; $T_4 = 44{,}5$.

Проверим выполнение равенства:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = n(n+1)/2$$

$$27 + 76{,}5 + 62 + 44{,}5 = 210;$$

$$20(20+1)/2 = 210.$$

210=210 – равенство выполняется.

Используя формулу (10.1), вычислим H-статистику:

$$H = \left[\frac{12}{20 \times 21}\left(\frac{27^2}{5} + \frac{76{,}5^2}{5} + \frac{62^2}{5} + \frac{44{,}5^2}{5}\right)\right] - 3 \times 21 = 7{,}889$$

Статистика H имеет приближенное χ^2-распределение с $k-1$ степенями свободы. При уровне значимости α, равном 0,05, определяем величину χ^2 — критического значения χ^2-распределения с $k-1=3$ степенями свободы; согласно таблицы П8 приложения $\chi^2_{кр.}$= 7,815. Поскольку вычисленная H-статистика равна 7,889 и превышает критическое значение 7,815, нулевая гипотеза отклоняется. Следовательно, не все фирмы поставляют синтетическое волокно, прочность которого имеет одинаковую медиану. Поскольку нулевая гипотеза отклоняется, приходим к выводу, что фирмы поставляют волокна разной прочности. (На следующем этапе необходимо попарно сравнить всех поставщиков и определить, какие из них отличаются друг от друга.)

Процедура Крускала-Уоллиса имеет меньше ограничений, чем F-критерий и предусматривает ранжирование по всем выборкам в совокупности. Общее распределение должно быть непрерывным, но его вид значения не имеет. Если эти условия не выполняются, критерий Крускала-Уоллиса по-прежнему можно применять для проверки гипотезы о различиях между c генеральными совокупностями. Альтернативная гипотеза утверждает, что среди c генеральных совокупностей существует хотя бы одна, которая отличается от остальных какой-нибудь характеристикой — либо средним значением, либо видом. С другой стороны, для применения F-критерия переменная должна быть числовой, а k выборок должны извлекаться из нормально распределенных генеральных совокупностей, имеющих одинаковую дисперсию.

В полностью рандомизированных экспериментах, для которых выполняются условия F-критерия, следует применять именно его, а не процедуру Крускала-Уоллиса, поскольку мощность F-критерия в этой ситуации выше. С другой стороны, если эти условия не выполняются, более мощным становится критерий Крускала-Уоллиса, и следует предпочесть именно его.

10.2 Практические задания (номер варианта определяется преподавателем)

10.2.1 Результаты рейтинга по иностранному языку среди магистров 6 направлений представлены в таблице

№п/п	Группа А	Группа Б	Группа В	Группа Г	Группа Д	Группа Е
	балл	балл	балл	балл	балл	балл
1	6	9	9	8	9	8
2	5	9	9	6	8	9
3	7	8	6	8	9	7
4	7	6	5	7	10	9
5	8	5	7	9	10	6
6	9	8			10	6
7	6				9	

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень подготовки магистрантов разных групп.

10.2.2 Результаты сравнения прочности стали марки Ст. 3 от 5 поставщиков представлены в таблице

№ п/п	Поставщик А	Поставщик Б	Поставщик В	Поставщик Г	Поставщик Д
	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2
1	51	65	66	66	66
2	51	63	64	66	63
3	52	65	63	64	64
4	53	66	64	65	64
5	51	64	63	64	63

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень прочности в поставках от разных поставщиков.

10.2.3 Результаты сравнения относительного удлинения стали марки Ст. 5 представлены в таблице

№ п/п	Поставщик А	Поставщик Б	Поставщик В	Поставщик Г	Поставщик Д
	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2
1	23	25	25	25	23
2	24	24	24	25	24
3	22	25	25	24	22
4	23	25	25	24	23
5	24	24	24	25	24
6	25	24	24		25
7	21	25			21

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень относительного удлинения в поставках от разных поставщиков

10.2.4 5 бригад водопроводчиков в течение полугода производят монтаж трубопроводов в девятиэтажных домах. За это время при приёмо-сдаточных испытаниях в соединениях труб обнаружено следующее число протечек:

Месяц	Бригады				
	1	2	3	4	5
Январь		2		1	3
Февраль	1	3	3	4	4
Март		1	2		2
Апрель					1
Май		1		1	2
Июнь			1		1

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень качества работы в бригадах

10.2.5 Результаты рейтинга по иностранному языку среди магистров 6 направлений представлены в таблице

№п/п	Группа А	Группа Б	Группа В	Группа Г	Группа Д	Группа Е
	балл	балл	балл	балл	балл	балл
1	6	9	9	8	9	8
2	5	9	9	6	8	9
3	7	8	6	8	9	7
4	7	6	5	7	10	9
5	8	5	7	9	10	6
6	9	8			10	6
7	6				9	

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень подготовки магистрантов разных групп.

10.2.6 Результаты сравнения прочности стали марки Ст. 3 от 5 поставщиков представлены в таблице

№ п/п	Поставщик А	Поставщик Б	Поставщик В	Поставщик Г	Поставщик Д
	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2
1	51	65	66	66	66
2	51	63	64	66	63
3	52	65	63	64	64
4	53	66	64	65	64
5	51	64	63	64	63

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень прочности в поставках от разных поставщиков

10.2.7 Результаты сравнения относительного удлинения стали марки Ст. 5 представлены в таблице

№ п/п	Поставщик А	Поставщик Б	Поставщик В	Поставщик Г	Поставщик Д
	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2	Прочность кг/см^2
1	23	25	25	25	23
2	24	24	24	25	24
3	22	25	25	24	22
4	23	25	25	24	23
5	24	24	24	25	24
6	25	24	24		25
7	21	25			21

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень относительного удлинения в поставках от разных поставщиков

10.2.8 5 бригад водопроводчиков в течение полугода производят монтаж трубопроводов в девятиэтажных домах. За это время при приёмо-сдаточных испытаниях в соединениях труб обнаружено следующее число протечек:

Месяц	Бригады				
	1	2	3	4	5
Январь		2		1	3
Февраль	1	3	3	4	1
Март		1		2	2
Апрель					1
Май	3	4	2	1	2
Июнь			1		1

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень качества работы в бригадах

10.2.9 5 бригад водопроводчиков в течение полугода производят монтаж трубопроводов в девятиэтажных домах. За это время при приёмо-сдаточных испытаниях в соединениях труб обнаружено следующее число протечек:

Месяц	Бригады				
	1	2	3	4	5
Январь		2		1	3
Февраль	1	3	3	4	
Март		1	2		2
Апрель	3			2	1
Май		1		1	2
Июнь			1		

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень качества работы в бригадах

10.2.10 Результаты рейтинга по иностранному языку среди магистров 6 направлений представлены в таблице

№п/п	Группа А	Группа Б	Группа В	Группа Г	Группа Д	Группа Е
	балл	балл	балл	балл	балл	балл
1	7	9	9	8	6	8
2	9	7	9	6	8	9
3	6	9	7	8	9	7
4	6	6	9	7	6	9
5	8	6	6	9	10	6
6	9	8	6	6	10	6
7	6			6	9	

Определить с помощью критерия Крускала-Уоллиса, сопоставим ли уровень подготовки магистрантов разных групп.

10.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 11
Ранговая корреляция

11.1 Теоретические сведения

Математическая обработка должна начинаться с использования самых простых приемов с совершенно понятной для исследователя сутью производимых преобразований. Учитывая большие возможности методов первичной обработки данных, не исключено, что этими приемами математическая обработка может и заканчиваться. Эти методы дают и основание для достоверных выводов, и материал для выдвижения новых гипотез, и стимул к новым размышлениям.

Наиболее простым и доступным является метод корреляций, в котором используется коэффициент ранговой корреляции Спирмена r_s. Основанием для выбора этого коэффициента служат:

– его универсальность;
– простота;
– широкие возможности в решении задач сравнения индивидуальных или групповых иерархий признаков.

Универсальность коэффициента ранговой корреляции проявляется в том, что он применим к любым количественно измеренным или ранжированным данным. Простота метода позволяет подсчитывать корреляцию "вручную". Уникальность метода ранговой корреляции состоит в том, что он позволяет сопоставлять не индивидуальные показатели, а индивидуальные иерархии, или профили, что недоступно ни одному из других статистических методов, включая метод линейной корреляции.

Коэффициент ранговой корреляции рекомендуется применять в тех случаях, когда нам необходимо проверить, согласованно ли изменяются разные признаки у одного и того же испытуемого и насколько совпадают индивидуальные ранговые показатели у двух отдельных испытуемых или у испытуемого и группы.

Метод ранговой корреляции Спирмена позволяет определить тесноту (силу) и направление корреляционной связи между двумя признаками или двумя профилями (иерархиями) признаков.

Для подсчета ранговой корреляции необходимо располагать двумя рядами значений, которые могут быть ранжированы. Такими рядами значений могут быть:

– два признака, измеренные в одной и той же группе испытуемых;
– две индивидуальные иерархии признаков, выявленные у двух испытуемых по одному и тому же набору признаков;
– две групповые иерархии признаков;
– индивидуальная и групповая иерархии признаков.

Вначале показатели ранжируются отдельно по каждому из признаков. Как правило, меньшему значению признака начисляется меньший ранг.

Рассмотрим первый случай (два признака). Здесь ранжируются индивидуальные значения, полученные разными испытуемыми, а затем индивидуальные значения по второму признаку.

Если два признака связаны положительно, то испытуемые, имеющие низкие ранги по одному из них, будут иметь низкие ранги и по другому, а испытуемые, имеющие высокие ранги по одному из признаков, будут иметь по другому признаку также высокие ранги. Для подсчета r_s необходимо определить разности (d) между рангами, полученными данным испытуемым по обоим признакам. Затем эти показатели d определенным образом преобразуются и вычитаются из 1. Чем меньше разности между рангами, тем больше будет r_s, тем ближе он будет к +1. Если корреляция отсутствует, то все ранги будут перемешаны и между ними не будет никакого соответствия. Формула составлена так, что в этом случае r_s, окажется близким к 0. В случае отрицательной корреляции низким рангам испытуемых по одному признаку будут соответствовать высокие ранги по другому признаку, и наоборот. Чем больше несовпадение между рангами испытуемых по двум переменным, тем ближе r_s к -1.

Рассмотрим второй случай (два индивидуальных профиля). Здесь ранжируются индивидуальные значения, полученные каждым из 2-х испытуемым по определенному (одинаковому для них обоих) набору признаков. Первый ранг получит признак с самым низким значением; второй ранг - признак с более высоким значением и т.д. Очевидно, что все признаки должны быть измерены в одних и тех же единицах, иначе ранжирование невозможно. Если индивидуальные иерархии двух испытуемых связаны положительно, то признаки, имеющие низкие ранги у одного из них, будут иметь низкие ранги и у другого, и наоборот.

В третьем случае (два групповых профиля) ранжируются среднегрупповые значения, полученные в 2-х группах испытуемых по определенному, одинаковому для двух групп признаку. В дальнейшем линия рассуждений такая же, как и в предыдущих двух случаях.

Наконец четвёртый случай (индивидуальный и групповой профили). Здесь ранжируются отдельно индивидуальные значения испытуемого и среднегрупповые значения по тому же набору признаков, которые получены, как правило, при исключении этого отдельного испытуемого - он не участвует в среднегрупповом профиле, с которым будет сопоставляться его индивидуальный профиль. Ранговая корреляция позволит проверить, насколько согласованы индивидуальный и групповой профили.

Во всех четырех случаях значимость полученного коэффициента корреляции определяется по количеству ранжированных значений N. В первом случае это количество будет совпадать с объемом выборки n. Во втором случае количеством наблюдений будет количество признаков, составляющих иерархию. В третьем и четвертом случае N - это также количество сопоставляемых признаков, а не количество испытуемых в группах. Подробные пояснения даны в примерах.

Если абсолютная величина r_s достигает критического значения или превышает его, корреляция достоверна.

В методе возможны два варианта гипотез. Первый относится к первому случаю, второй - к трем остальным случаям.

Первый вариант гипотез:

H_0: Корреляция между переменными А и Б не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между переменными А и Б достоверно отличается от нуля.

Второй вариант гипотез:

H_0: Корреляция между иерархиями А и Б не отличается от нуля.

H_1: *К*орреляция между иерархиями А и Б достоверно отличается от нуля.

Коэффициент ранговой корреляции можно использовать, когда:

– По каждой переменной должно быть представлено не менее 5 наблюдений. Верхняя граница выборки определяется имеющимися таблицами критических значений, а именно $N \leq 40$.

– Коэффициент ранговой корреляции Спирмена r_s при большом количестве одинаковых рангов по одной или обеим сопоставляемым переменным дает огрубленные значения. В идеале оба коррелируемых ряда должны представлять собой две последовательности несовпадающих значений. В случае, если это условие не соблюдается, необходимо вносить поправку на одинаковые ранги.

Пример 1 – корреляция между двумя признаками.

В исследовании, моделирующем деятельность авиадиспетчера, группа испытуемых курсантов проходила подготовку перед началом работы на тренажере. Испытуемые должны были решать задачи по выбору оптимального типа взлетно-посадочной полосы для заданного типа самолета. Связано ли количество ошибок (таблица 11.1), допущенных испытуемыми в тренировочной сессии, с показателями вербального и невербального интеллекта?

Сначала попробуем ответить на вопрос, связаны ли между собой показатели количества ошибок и вербального интеллекта.

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем вербального интеллекта не отличается от нуля.

*H_1: К*орреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем вербального интеллекта статистически значимо отличается от нуля.

Таблица 11.1

Показатели количества ошибок в тренировочной сессии и показатели уровня вербального и невербального интеллекта у курсантов-авиадиспетчеров (*N*=10)

Испытуемый		Количество ошибок	Показатель вербального интеллекта	Показатель невербального интеллекта
1	Т.А.	29	131	106
2	П.А.	54	132	90
3	Ч.И.	13	121	95
4	Ц.А.	8	127	116
5	См.А.	14	136	127
6	К.Е.	26	124	107
7	К.А.	9	134	104
8	Б.Л.	20	136	102
9	И.А.	2	132	111
10	Ф.В.	17	136	99
Суммы		192	1309	1057
Средние		19,2	130,9	105,7

Далее нам необходимо ранжировать оба показателя, приписывая меньшему значению меньший ранг, затем подсчитать разности между рангами, которые получил каждый испытуемый по двум переменным (признакам), и возвести эти разности в квадрат. Внесём результаты расчётов в таблица 11.2.

В первой колонке слева представлены значения по показателю количества ошибок, в следующей колонке - их ранги, в третьей колонке представлены значения по показателю вербального интеллекта, а в следующем столбце - их ранги; в пятом столбце представлены разности *d* между рангом переменной А (количество ошибок) и переменной Б (вербальный интеллект), а в последнем столбце - квадраты разностей - d^2.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена подсчитывается по формуле 11.1:

$$r_{s_э} = 1 - \frac{6\sum(d^2)}{N(N^2-1)} \qquad (11.1)$$

где d - разность между рангами по двум переменным для каждого испытуемого; N - количество ранжируемых значений, в. данном случае количество испытуемых.

Таблица 11.2

Расчет d^2 для рангового коэффициента корреляции Спирмена r_s при сопоставлении показателей количества ошибок и вербального интеллекта

Испытуемый		Переменная А количество ошибок		Переменная Б вербальный интеллект.		d (ранг А - - ранг Б)	d^2
		Индивидуальные значения	Ранг	Индивидуальные значения	Ранг		
1	ТА.	29	9	131	4	5	25
2	ПА.	54	10	132	5.5	4,5	20.25
3	Ч.И.	13	4	121	1	3	9
4	Ц.А.	8	2	127	3	-1	1
5	См.А.	14	5	136	9	-4	16
6	К.Е.	26	8	124	2	6	36
7	К.А.	9	3	134	7	-4	16
8	Б.Л.	20	7	136	9	-2	4
9	И.А.	2	1	132	5,5	-4,5	20,25
10	Ф.В.	17	6	136	9		9
Суммы			55		55	0	156,5

Рассчитаем эмпирическое значение r_s:

$$r_{s\text{э}} = 1 - \frac{6\sum(d^2)}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{939}{990} = 0{,}052$$

Полученное эмпирическое значение r_s близко к 0. И все же определим критические значения r_s при N=10 по таблице П9 в приложении:

$$r_{s\text{к}} = \begin{cases} 0{,}64 (p \le 0{,}05) \\ 0{,}79 (p \le 0{,}01) \end{cases}$$

$$r_{s\text{э}} \le r_{s\text{к}}$$

Ответ: H_0 принимается. Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем вербального интеллекта практически равна нулю.

Теперь попробуем ответить на вопрос, связаны ли между собой показатели количества ошибок и невербального интеллекта.

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем невербального интеллекта не отличается от 0.

H_1: Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем невербального интеллекта статистически значимо отличается от 0.

Таблица 11.3

Расчет d^2 для рангового коэффициента корреляции Спирмена r_s при сопоставлении показателей количества ошибок и невербального интеллекта

Испытуемый		Переменная А количество ошибок		Переменная Б невербальный интеллект		d (ранг А — — ранг Б)	d^2
		Индивидуальные значения	Ранг	Индивидуальные значения	Ранг		
1	Т.А.	29	9	106	6	3	9
2	П:А.	54	10	90	1	9	81
3	Ч.И.	13	4	95	2	2	4
4	Ц-А. „	8	2	116	9	-7	49
5	См.А.	14	5	127	10	-5	25
6	К.Е.	26	8	107	7	1	1
7	К.А.	9	3	104	5	-2	4
8	Б.Л.	20	7	102	4	3	9
9	И.А.	2	1	111	8	-7	49
10	Ф.В.	17	6	99	3	3	9
Суммы			55		55	0	240

Теперь попробуем ответить на вопрос, связаны ли между собой показатели количества ошибок и невербального интеллекта.

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем невербального интеллекта не отличается от 0.

H_1: Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем невербального интеллекта статистически значимо отличается от 0.

Результаты ранжирования и сопоставления рангов представлены в таблице 11.3.

Аналогично предыдущему рассчитаем эмпирическое значение r_s

$$r_s = 1 - \frac{6\sum(d^2)}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{1440}{990} = -0{,}455$$

Критические значения те же, что и в предыдущем случае

$$r_{s\kappa} = \begin{cases} 0{,}64(p \le 0{,}05) \\ 0{,}79(p \le 0{,}01) \end{cases}$$

$$r_{sэ} \le r_{s\kappa}$$

Мы помним, что для определения значимости r_s неважно, является ли он положительным или отрицательным, важна лишь его абсолютная величина. В данном случае:

$$r_{sэ} < r_{s\kappa}$$

Ответ: H_0 принимается. Корреляция между показателем количества ошибок в тренировочной сессии и уровнем невербального интеллекта случайна, r_s не отличается от 0.

Вместе с тем, мы можем обратить внимание на определенную тенденцию отрицательной связи между этими двумя переменными. Возможно, мы смогли бы ее подтвердить на статистически значимом уровне, если бы увеличили объем выборки.

Пример 2 - корреляция между индивидуальными профилями

В исследовании, посвященном проблемам ценностной переориентации, выявлялись иерархии терминальных ценностей у родителей и их взрослых детей. Ранги терминальных ценностей, полученные при обследовании пары мать-дочь (матери - 66 лет, дочери - 42 года) представлены в таблице 11.4.

Попытаемся определить, как эти ценностные иерархии коррелируют друг с другом.

Таблица 11.4

Ранги терминальных ценностей в индивидуальных иерархиях матери и дочери

Терминальные ценности	Ранг ценностей в иерархии матери	Ранг ценностей в иерархии дочери	d	d^2
1 Активная деятельная жизнь	15	15	0	0
2 Жизненная мудрость	1	3	-2	4
3 Здоровье	7	14	-7	49
4 Интересная работа	8	12	-4	16
5 Красота природы и искусство	16	17	-1	1

1	2	3	4	5
6 Любовь	11	10	1	1
7 Материально обеспеченная жизнь	12	13	-1	1
8 Наличие хороших и верных друзей	9	11	-2	4
9 Общественное признание	17	5	12	144
10 Познание	5	1	4	16
11 Продуктивная жнзнь	2	2	0	0
12 Развитие	6	8	-2	4
13 Развлечения	18	18	0	0
14 Свобода	4	6	-2	4
15 Счастливая семейная жизнь	13	4	9	81
16 Счастье других	14	16	-2	4
17 Творчество	10	9	1	1
18 Уверенность в себе	3	7	-4	16
Суммы	171	171	0	346

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между иерархиями терминальных ценностей матери и дочери не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между иерархиями терминальных ценностей матери и дочери статистически значимо отличается от нуля.

Поскольку ранжирование ценностей предполагается самой процедурой исследования, нам остается лишь подсчитать разности между рангами 18 ценностей в двух иерархиях . В 4-м и 5-м столбцах табл. 4 представлены разности d и квадраты этих разностей d^2.

Определяем эмпирическое значение r_s по формуле 2:

$$r_{sэ.} = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)}, \qquad (11.2)$$

где d - разности между рангами по каждой из переменных, в данном случае по каждой из терминальных ценностей;

N - количество переменных, образующих иерархию, в данном случае количество ценностей.

Для данного примера:

$$r_{sэ} = 1 - \frac{6 \times 346}{18(18^2-1)} = 1 - \frac{2076}{5814} = 0.643$$

По табл. определяем критические значения:

$$r_{s\kappa.} = \begin{cases} 0{,}47(p \leq 0{,}05) \\ 0{,}60(p \leq 0{,}01) \end{cases}$$

$$r_{s\text{э}.} \geq r_{s\kappa.}$$

Ответ: H_0 отвергается. Принимается H_1. Корреляция между иерархиями терминальных ценностей матери и дочери статистически значима и является положительной.

По данным таблицы11.4 мы можем определить, что основные расхождения приходятся на ценности "Счастливая семейная жизнь", "Общественное признание" и "Здоровье", ранги остальных ценностей достаточно близки.

Пример 3 - корреляция между двумя групповыми иерархиями

По 32 испытуемых (отечественных и американских студентов) должны были по 10-балльной шкале оценить, насколько актуальным для них является тот или иной вид страха. Данные, полученные по 10-балльной шкале, были усреднены по 32 испытуемым, и средние проранжированы. В таблице 11.5 представлены ранговые показатели. Совпадают ли ранговые последовательности 20 видов страха у студентов разных государств?

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между упорядоченными перечнями видов страха в американской и отечественных выборках не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между упорядоченными перечнями видов страха в американской и отечественной выборках статистически значимо отличается от нуля.

Все расчеты, связанные с вычислением и возведением в квадрат разностей между рангами разных видов страха в двух выборках, представлены в таблице 11.5.

Таблица 11.5.

Расчет *d* для рангового коэффициента корреляции Спирмена при сопоставлении упорядоченных перечней видов страха
в американской и отечественной выборках

Виды страха		Ранг в американской выборке	Ранг в российской выборке	d	d^2
1		2	3	4	5
1	Страх публичного выступления	1	7	-6	36
2	Страх полета	2	12	-10	100
3	Страх совершить ошибку	3	10	-7	49
4	Страх неудачи	4	6	-2	4
5	Страх неодобрения	5	9	-4	16
6	Страх отвержения	6	2	4	16
7	Страх злых людей	7	5	2	4
8	Страх одиночества	8	1	7	49
9	Страх крови	9	16	-7	49
10	Страх открытых ран	10	13	-3	9
И	Страх дантиста	11	3	8	64
12	Страх уколов	12	19	-7	49
13	Страх прохождения тестов	13	20	-7	49
14	Страх полиции (милиции)	14	17	-3	9
15	Страх высоты	15	4	11	121
16	Страх собак	16	11	5	25
17	Страх пауков	17	18	-1	1
18	Страх искалеченных людей	18	8	10	100
19	Страх больниц	19	15	4	16
20	Страх темноты	20	14	6	36
Суммы		210	210	0	802

Определяем эмпирическое значение r_s:

$$r_{s э.} = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)} = \frac{6\times 802}{20(20^2-1)} = 1 - \frac{4812}{7980} = 0{,}397$$

По таблице П8 определяем критические значения r_s при N=20:

$$r_{s к.} = \begin{cases} 0{,}45 (p \le 0{,}05) \\ 0{,}57 (p \le 0{,}01) \end{cases}$$

$$r_{s э.} \le r_{s к.}$$

Ответ: H_0 принимается. Корреляция между упорядоченными перечнями видов страха в американской и отечественной выборках не достигает уровня статистической значимости, т. е. значимо не отличается от нуля.

Пример 4 - корреляция между индивидуальным и среднегрупповым профилями

Выборке горожан в возрасте от 20 до 75 лет (31 мужчина, 46 женщин), уравновешенной по возрасту таким образом, что лица в возрасте старше 55 лет составляли в ней 50,4%, предлагалось ответить на вопрос: "Какой уровень развития каждого из перечисленных ниже качеств необходим для депутата Городского собрания?" Оценка производилась по 10-балльной шкале. Параллельно с этим обследовалась выборка из депутатов и кандидатов в депутаты в Городское собрание Санкт-Петербурга (n=14). Индивидуальная диагностика политических деятелей и претендентов производилась с помощью системы экспресс-видеодиагностики по тому же набору личностных качеств, который предъявлялся выборке избирателей.

В таблице11.6 представлены средние значения, полученные для каждого из качеств в выборке избирателей («эталонный ряд») и индивидуальные значения одного из депутатов городского собрания.

Попытаемся определить, насколько индивидуальный профиль депутата К-ва коррелирует с эталонным профилем.

Таблица 11.6

Усредненные эталонные оценки избирателей (n=77) и индивидуальные показатели депутата К-ва

по 18 личностным качествам экспресс-видеодиагностики

Наименование качества	Усредненные эталонные оценки избирателей	Индивидуальные показатели депутата К-ва
1. Общий уровень культуры	8,64	15
2. Обучаемость	7,89	7
3. Логика	8,38	12
4. Способность к творчеству нового	6,97	5
5.Самокритичность	8,28	14
6. Ответственность	9,56	18
7. Самостоятельность	8,12	13
8. Энергия, активность	8,41	17
9. Целеустремленность	8,00	19
10. Выдержка, самообладание	8,71	9
11. Стойкость	7,74	16

12. Личностная зрелость	8,10	11
13. Порядочность	9,02	12
14. Гуманизм	7.89	10
15. Умение общаться с людьми	8,74	8
16. Терпимость к чужому мнению	7.84	6
17. Гибкость поведения	7,67	4
18.Способность производить благоприятное впечатление	7,23	8

Как видно из таблицы 11.6, оценки избирателей и индивидуальные показатели депутата варьируются в 20-ти балльной шкале. Ранжирование, как мы помним, необходимо произвести отдельно по каждому ряду значений. В данном случае целесообразно начислять большему значению меньший ранг, чтобы сразу можно было увидеть, на каком месте по значимости (для избирателей) или по выраженности (у депутата) находится то или иное качество. Переводим обе шкалы измерения в единую, где единицей измерения будет 1 ранг; минимальное значение составит 1 ранг, а максимальное - 18 рангов.

Результаты ранжирования представлены в таблице 11.7. Качества перечислены в последовательности, отражающей эталонный профиль – усреднённый профиль избирателей.

Сформулируем гипотезы.

H_0: Корреляция между индивидуальным профилем депутата К-ва и эталонным профилем, построенным по оценкам избирателей, не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между индивидуальным профилем депутата К-ва и эталонным профилем, построенным по оценкам избирателей, статистически значимо отличается от нуля. Поскольку в обоих сопоставляемых ранговых рядах присутствуют группы одинаковых рангов, перед подсчетом коэффициента ранговой корреляции необходимо внести поправки на одинаковые ранги T_a и T_b:

$$T_a = \sum (a^3 - a)/12;$$
$$T_b = \sum (b^3 - b). \qquad (11.3)$$

где a - объем каждой группы одинаковых рангов в ранговом ряду А,

b - объем каждой группы одинаковых рангов в ранговом ряду В.

Таблица 11.7

Расчет d^2 для рангового коэффициента корреляции Спирмена между эталонным и индивидуальным профилями личностных качеств депутата

Наименование качества	Ряд А: ранг качества в эталонном профиле	Ряд В: ранг качества в индивидуальном профиле	d	d^2
1	2	3	4	5
1 Ответственность	1	2	-1	1
2 Порядочность	2	8,5	-6,5	42,25
3 Умение общаться с людьми	3	13,5	-10,5	110,25
4 Выдержка, самообладание	4	12	-8	64
5 Общий уровень культуры	5	5	0	0
6 Энергия, активность	6	3	3	9
7 Логика	7	8,5	-1,5	2,25
8 Самокритичность	8	6	2	4
9 Самостоятельность	9	7	2	4
10 Личностная зрелость	10	10	0	0
11 Целеустремленность	11	1	10	100
12 Обучаемость	12,5	15	-2,5	6,25
13 Гуманизм	12,5	11	1,5	2,25
14 Терпимость к чужому мнению	14	16	-2	4
15 Стойкость	15	4	11	121
16 Гибкость поведения	16	18	-2	4
17Способность производить благоприятное впечатление	17	13,5	3,5	12,25
18 Способность к творчеству нового	18	17	1	1
Суммы	171	171	0	487,5

В данном случае, в ряду А (эталонный профиль) присутствует одна группа одинаковых рангов - качества "обучаемость" и "гуманизм" имеют один и тот же ранг 12,5; следовательно, a = 2.

$T_a=(2^3-2)/12=0{,}50$ $T_b=[(2^3-2)+(2^3-2)]/12=1{,}00$

В ряду В (индивидуальный профиль) присутствует две группы одинаковых рангов, при этом $b_1=2$ и $b_2=2$.

Для подсчета эмпирического значения r_s используем формулу 3:

$$r_{sэ.} = 1 - \frac{6\sum d^2 + T_a + T_b}{N(N^2-1)} \qquad (11.4)$$

В данном случае:

$$r_{s э.} = 1 - \frac{6 \times 487{,}5 + 0{,}5 + 1{,}0}{18(18^2 - 1)} = \frac{2926{,}5}{5814} = 0{,}4967$$

Заметим, что если бы поправка на одинаковые ранги нами не вносилась, то величина r_s была бы лишь на (на 0,0002) выше:

$$r_{s э.} = 1 - \frac{6 \times 487{,}5}{18(18^2 - 1)} = \frac{2925}{5814} = 0{,}4969$$

При больших количествах одинаковых рангов изменения r_s могут оказаться гораздо более существенными. Наличие одинаковых рангов означает меньшую степень дифференцированных упорядоченных переменных и, следовательно, меньшую возможность оценить степень связи между ними

По табл. Приложения определяем критические значения r при N=18:

$$r_{s к.} = \begin{cases} 0{,}47 (p \le 0{,}05) \\ 0{,}60 (p \le 0{,}01) \end{cases}$$

$$r_{s э.} \ge r_{s к.}$$

Ответ: H_0 отвергается. Корреляция между индивидуальным профилем депутата и эталонным профилем, отвечающим требованиям избирателей, статистически значима (p<0,05) и является положительной.

Из таблицы 11.7 видно, что депутат имеет более низкий ранг по шкалам «Умения общаться с людьми» и более высокие ранги по шкалам «Целеустремленности» и «Стойкости», чем это предписывается избирательским эталоном (по мнению потребителей). Этими расхождениями, главным образом, и объясняется некоторое снижение полученного r_s.

11.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

11.2.1 Установить уровень взаимопонимания между тренером и футболистом в зависимости от их отношения к требованиям, определяющим качества игрока, используя иерархии их ценностей

Ценности	Тренер	Футболист
Игровая дисциплина	1	7
Настойчивость	2	6
Выносливость	3	3
Техника	4	1
Ответственность	5	8

Сила удара	6	4
Уверенность в себе	7	2
Скорость	8	5
Коллективизм	9	10
. Авторитет в команде	10	9

11.2.2Установить, существует ли корреляция в уровне бесполезных опасений между жителями города и села

Опасность	Город	Село
Болезни	1	1
Грабители	2	4
Полиции	3	5
Шефа (директора, хозяина)	4	8
Налогов	5	13
Автомобилей	6	6
Неудачи	7	12
Высоты	8	3
Темноты	9	2
. Отвержения (неодобрения)	10	7

11.2.3 Установить уровень взаимопонимания между тренером и баскетболистом в зависимости от их отношения к требованиям, определяющим качества игрока, используя иерархии их ценностей

Ценности	Тренер	Баскетболист
. Игровая дисциплина	1	7
. Настойчивость	2	6
. Выносливость	3	3
. Точность броска	4	4
. Скорость	5	5
. Техника обводки	6	1
. Ответственность	7	8
. Уверенность в себе	8	2
. Коллективизм	9	10
. Авторитет в команде	10	9

11.2.4Установить, существует ли корреляция в уровне опасений между врачами и пациентами

Опасность	Врач	Пациент
. Болезни венерические	1	3
. ВИЧ инфекции	2	1
. Гепатит	3	2
. Ошибка диагностирования	4	4
. Отсутствие лекарств	5	6
. Неквалифицированный персонал	6	7
. Несоблюдение дисциплины	7	8
. Недостаток внимания	8	5
. Некачественное питание	9	10
. Некачественное обслуживание	10	9

11.2.5 Установить, существует ли корреляция во взаимопонимании между мастерами и клиентами СТО автомобилей

Показатели	Мастер	Клиент
. Точность диагностирования	1	3
. Время обслуживания	2	1
. Согласование объёма работ	3	2
. Согласование цены обслуживания	4	8
. Наличие запчастей	5	5
. Возможность контакта с мастером (клиентом)	6	4
. Возможность предварительного заказа	7	6
. Согласование времени обслуживания	8	7
. Вежливость персонала (клиента)	9	10
. Дополнительные услуги	10	9

11.2.6 Установить уровень взаимопонимания между тренером и футболистом в зависимости от их отношения к требованиям, определяющим качества игрока, используя иерархии их ценностей

Ценности	Тренер	Футболист
. Игровая дисциплина	1	4
. Настойчивость	2	1
. Выносливость	3	7
. Техника	4	5
. Ответственность	5	6
. Сила удара	6	10
. Уверенность в себе	7	3
. Скорость	8	7
. Коллективизм	9	8
. Авторитет в команде	10	2

11.2.7 Установить, существует ли корреляция в уровне опасений между жителями города и села

Опасность	Город	Село
. Болезни	1	7
. Грабители	2	1
. Полиции	3	3
. Шефа (директора, хозяина)	4	4
. Налогов	5	8
. Автомобилей	6	10
. Неудачи	7	2
. Высоты	8	9
. Темноты	9	6
. Отвержения (неодобрения)	10	5

11.2.8 Установить уровень взаимопонимания между тренером и баскетболистом в зависимости от их отношения к требованиям, определяющим качества игрока, используя иерархии их ценностей

Ценности	Тренер	Баскетболист
. Игровая дисциплина	1	7
. Настойчивость	2	10
. Выносливость	3	4
. Точность броска	4	3
. Скорость	5	1
. Техника обводки	6	6

. Ответственность	7	8
. Уверенность в себе	8	2
. Коллективизм	9	6
. Авторитет в команде	10	9

11.2.9Установить, существует ли корреляция в уровне опасений между врачами и пациентами

Опасность	Врач	Пациент
. Болезни венерические	1	1
. ВИЧ инфекции	2	3
. Гепатит	3	2
. Ошибка диагностирования	4	5
. Отсутствие лекарств	5	6
. Неквалифицированный персонал	6	7
. Несоблюдение дисциплины	7	8
. Недостаток внимания	8	4
. Некачественное питание	9	9
. Некачественное обслуживание	10	10

1.2.10 Установить, существует ли корреляция во взаимопонимании между мастерами и клиентами СТО

Показатели	Мастер	Клиент
. Точность диагностирования	1	1
. Время обслуживания	2	3
. Согласование объёма работ	3	2
. Согласование цены обслуживания	4	9
. Наличие запчастей	5	5
. Возможность контакта с мастером (клиентом)	6	4
. Возможность предварительного заказа	7	6
. Согласование времени обслуживания	8	10
. Вежливость персонала (клиента)	9	7
1	2	
. Дополнительные услуги	10	8

11.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 12
Q – критерий Розенбаума

12.1 Теоретические сведения

Критерий используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. В каждой из выборок должно быть не менее 11 испытуемых (значений). Не выявленность достоверных различий с помощью этого критерия, строго говоря, не означает их отсутствия, а указывает на необходимость применения более мощного критерия, например *F*-критерия Фишера. Если *Q* – критерий выявил достоверное различие с уровнем значимости $p \leq 0{,}01$ – можно ограничиться только его применением.

Критерий применим в тех случаях, когда данные представлены, по крайней мере, в порядковой шкале. Признак должен варьировать в некотором диапазоне значений – в противном случае применение критерия невозможно. Например, если имеется только 3 значения признака – x_1, x_2, x_3 – установить различия очень трудно. Метод Розенбаума требует, соответственно, достаточно тонко измеренных признаков.

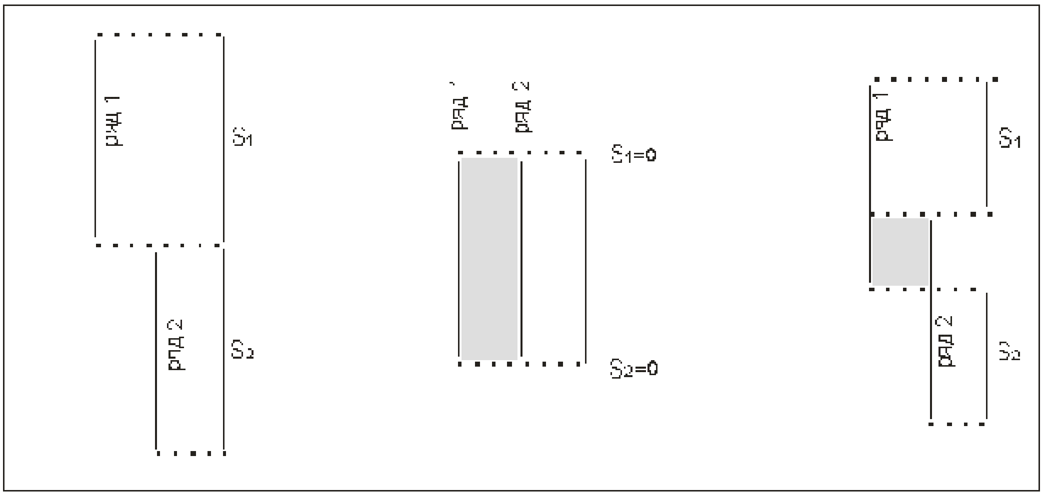
Применение критерия начинается с упорядочивания значений признака в обеих выборках по нарастанию (или убыванию). Целесообразно каждое значение представить на отдельной карточке с целью их последующей систематизации, после чего становится видно, совпадают ли диапазоны значений. Если нет, то определяется, насколько один ряд «выше» - $S1$, а другой «ниже» - $S2$. Чтобы избежать путаницы, рекомендуется первым рядом считать тот, где значения выше, а вторым – тот, где ниже.

Варианты графического представления Q-критерия показаны на рисунке 12.1.

Гипотезы:

Ho: Уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H1: Уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.



А Б В

Рис. 11.2. Графическое представление *Q*-критерия

В варианте А) все значения первого ряда выше всех значений второго. Различия, безусловно, достоверны (при условии, что n_1 и n_2 больше или равно 11). В варианте Б) оба ряда находятся на одном и том же уровне и различия недостоверны. В варианте В) ряды частично пересекаются, но, все же, первый ряд оказывается выше второго. Величина *Q* равна сумме *S1* и *S2*. Чем она больше, тем достовернее различия.

Ограничения критерия *Q*:

- В каждой из выборок должно быть не менее 11 наблюдений;
- Объемы выборок должны примерно совпадать:

Меньше 50 наблюдений – разница не более 10;

От 50 до 100 наблюдений – не больше 20;

Если больше ста наблюдений, то одна из выборок не должна быть больше другой более чем в 1,5 – 2 раза.

Диапазоны разброса значений в двух выборках не должны совпадать между собой, иначе применение критерия бессмысленно.

Пример:

Известны индивидуальные значения показателя интеллекта в двух группах испытуемых Можно ли считать, что одна группа превосходит другую по показателю интеллекта?

Решение

1) Выбираем ряд, который предположительно выше по показателям (например, группа 1) и считаем этот ряд рядом №1

2) Упорядочиваем по убыванию ряды значений в обеих группах и заносим в таблице 12.1.

Таблица 12.1

Ранжированные данные для примера

1 – группа испытуемых (первая выборка значений)			2– группа испытуемых (вторая выборка значений)		
Номер	Код (ранг) испытуемого	Показатель интеллекта	Номер	Код (ранг) испытуемого	Показатель интеллекта
S1 1	2	136			
2	2	136			
3	2	136			
4	4	135			
5	5	134			
6	8	132	1	8	132
7	8	132			
8	8	132			
9	8	132			
10	11	131			
11	12	129			
12	13,5	127	2	13,5	127
			3	15	126
			4	16	126
13	17	125			
			5	18	123
			6	19	123
14	20	122			
S2			7	21	120
			8	22	120
			9	23	120
			10	24	119
			11	25	116
			12	26	115

3) Наименьшему значению начисляется ранг 1.

Наибольшему значению начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых значений. (Например, если n = 26, то наибольшее значение получит ранг 26.)

4) В случае если несколько значений равны, им начисляется ранг, представляющий собой среднее значение из тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны. (Например, три наименьших значения равны 10 секундам. Если бы время было измерено более точно, то, вероятно, между этими значениями все-таки были бы отличия, скажем, 10,2; 10,3; 10,4 секунды. В этом случае они получили бы соответственно ранги 1-й, 2-й и 3-й. Но поскольку эти три первых значения равны, то получают средний ранг:

$$(1 + 2 + 3)/3 = 2.$$

Допустим, следующие два значения равны 12 секундам. Они должны были бы получить ранги 4 и 5, но поскольку равны, получают средний ранг: 4,5.

Примечание: Не следует путать понятие ранга и понятия порядкового номера! При ранжировании мы выбираем в качестве следующего значения не следующее «по списку», а следующее по величине.

5) Общая сумма рангов должна совпадать с расчетной, которая вычисляется по формуле:

$$S(R_i) = N(N+1)/2, \tag{12.1}$$

где N – общее количество ранжируемых наблюдений (значений).

Примечание: Несовпадение реальной и расчетной суммы рангов свидетельствует о допущенной ошибке при начислении рангов или при их суммировании!

6) Из таблицы 12.1 определяем количество значений первого ряда, которые больше максимального значения второго ряда: $S1$ = 5

7) Определяем количество значений второго ряда, которые ниже минимального значения первого ряда: $S2$ = 6

8) Вычисляем $Q_{эмп.}$ по формуле: $Q_{эмп} = S1 + S2$=5+6=11

9) Из таблицы П10 приложения находим критические значения для данных размеров выборок:

$Q_{кр0,05.}= 7$, $Q_{кр.0,01.}= 9$

Сопоставление полученного эмпирическое значение $Q_{эмп.}$ с $Q_{кр}$ при $p \leq 0{,}05$ и при $p \leq 0{,}01$ даёт основание отвергнуть гипотезу H_{0}.

12.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

Сравнить успеваемость по физике (выборочно) в осеннем семестре в группах двух факультетов в разные годы

Вар.1		Вар.2		Вар.3		Вар.4		Вар.5		Вар.6		Вар.7		Вар.8		Вар.9		Вар.10	
2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016		2017	
64	58	71	66	60	66	58	60	66	66	66	66	66	66	66	89	89	69	69	68
72	58	78	70	63	50	58	63	50	77	70	50	50	77	77	76	76	68	68	57
67	68	67	68	74	53	68	74	53	71	68	53	53	71	71	81	81	61	61	71
66	62	64	72	68	72	62	68	72	69	75	72	72	69	69	64	64	63	63	65
61	67	72	62	62	58	67	62	58	75	62	58	58	75	75	75	75	66	66	67
76	69	66	62	62	71	69	62	71	68	62	71	71	68	68	67	67	68	68	66
69	67	67	60	66	68	67	66	68	77	60	68	68	77	77	81	81	56	56	64
58	65	64	60	52	67	65	52	67	63	60	67	67	63	63	68	68	60	60	71
63	58	69	61	62	55	58	62	55	71	61	55	55	71	71	65	65	59	59	67
67	78	80	66	63	64	78	63	64	69	66	64	64	69	69	72	72	48	48	57
59	69	69	69	65	62	69	65	62	72	69	62	62	72	72	53	53	59	59	59
58	77	59	63	65	59	77	65	59	71	63	59	59	71	71	67	67	58	58	52
66	71	64	53	61	49	71	61	49	61	45	49	49	61	61	65	65	58	58	59
64	71	65	60	61	60	71	61	60	79	60	60	60	79	79	68	68	67	67	54
	75	69	62			75			76	62			76	76	73	73	51	51	66

12.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

Практическая работа 13

S – критерий тенденций Джонкира

13.1 Теоретические сведения

S – критерий тенденций Джонкира предназначен для выявления тенденций изменения признака при сопоставлении трех и более выборок. Меру связи между количественно измеренными переменными можно установить с помощью вычисления коэффициента ранговой корреляции или линейной корреляции. Однако критерий тенденции S имеет следующие преимущества перед коэффициентами корреляции:

– а) критерий тенденций S более прост в подсчете;

– б) он применим и в тех случаях, когда один из признаков варьирует в узком диапазоне, например, принимает всего 3 или 4 значения, в то время как при подсчете ранговой корреляции в этом случае мы получаем огрубленный результат, нуждающийся в поправке на одинаковые ранги.

Критерий S позволяет упорядочить обследованные выборки по какому-либо признаку: изменение свойств памяти с возрастом, уровень подготовки по группам, наличие каких-либо навыков и т.д.

В результате можно утверждать, что на первом месте по выраженности исследуемого признака стоит выборка, например, *Б*, на втором –*А,* на третьем – *В* и т.д. Интерпретация полученных результатов будет зависеть от того, по какому принципу были образованы исследуемые выборки. Здесь возможны два принципиально отличных варианта:

– Если выборки различаются по качественным признакам (профессии, национальности, месту работы и т. п.), то можно упорядочить их по количественно измеряемому признаку (креативности, гибкости и т.п.).

– Если выборки различаются по количественному признаку (возрасту, стажу работы, социометрическому статусу и др.), то упорядочить их можно по другому количественному признаку. Т.е. фактически установить меру связи между двумя количественными признаками.

Гипотезы:

H_0: Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке не является случайной.

H_1: Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке является случайной.

Условия применения критерия *S* Джонкира:

- Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов или отношений.
- Выборки должны быть независимыми.
- Количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым. Если число наблюдений неодинаково, то необходимо уравнивать с применением случайного отбора.
- Нижняя граница применимости критерия: не менее трех выборок и не менее двух элементов в каждом наблюдении. Верхняя граница определяется таблицей Приложения – не более 6 выборок и не более 10 элементов в каждой выборке. Во всех других случаях следует пользоваться критерием *H* Крускала-Уолисса.

Алгоритм подсчета критерия *S* –Джонкира:

- Проверить, выполняются ли ограничения
- Упорядочить выборки слева направо в порядке возрастания значений исследуемого признака, опираясь на средние значения. Сформулировать гипотезы.
- Занести данные в таблицу, оставив свободные столбцы рядом со значениями.
- Начиная с крайнего левого столбца подсчитать для каждого индивидуального значения количество превышающих его значений во всех столбцах справа (S_i). Полученные суммы записать рядом с каждым индивидуальным значением.
- Подсчитать суммы полученных показателей по столбцам.

– ΣПодсчитать общую сумму S_i, просуммировав все суммы по столбцам. Эту общую сумму обозначить как *А*.

– Подсчитать максимально возможное количество превышающих значений (*В*), которое мы получили бы, если бы все значения справа были выше значений слева:

$$B = \frac{c(c-1)}{2} n^2 \tag{13.1}$$

где c количество выборок,

n - количество наблюдений в каждой выборке.

– Определить эмпирическое значение *S* по формуле (13.2):

$$S = 2A - B \tag{13.2}$$

– По таблице П11 приложения определить критические значения *S* для данных *n и c*.

– Для процесса принятия решения вычертить «ось значимости».

Пример:

В выборке из 20 работников инженерно-технического персонала проводилось тестирование на владение метрологической терминологией. В таблице приведены индивидуальные значения испытуемых по ответам на *N* вопросов. Данные сгруппированы по техническим бюро производственных подразделений. Можно ли утверждать, что есть определенная тенденция изменения значений фактора *N* при переходе от группы к группе?

Индивидуальные значения по фактору *N* (правильные ответы на 16 тестовых вопросов) в 4 подразделениях внесены в таблице 13.1

Таблица 13.1

Исходные данные к к примеру

№№ испытуемых	1 группа Техбюро №1	2 группа Техбюро №2	3 группа Техбюро №3	4 группа Техбюро №4
1	2	11	8	11
2	10	7	12	12
3	5	8	14	9
4	8	12	9	9
5	10	12	16	10
Суммы	35	50	59	51
Среднее	7	10	11,8	10,2

Решение:

Сначала необходимо проверить, есть ли возможность применить критерий Джонкира.

В данном случае количество групп *(с)* меньше 6, количество испытуемых в каждой группе*(n)* меньше 10, при этом все группы численно равны. Следовательно, критерий *S* применим.

Изменим последовательность расположения групп, упорядочив их по нарастанию значений фактора *N*, для чего придется поменять местами 4-ю и 3-ю группы.

Гипотезы к задаче

H_0: Тенденция возрастания значений по фактору N при переходе от группы к группе в последовательности 1-2-4-3 является случайной.

H_1: Тенденция возрастания значений по фактору N при переходе от группы к группе в последовательности 1-2-4-3 не является случайной.

Расчеты для нахождения эмпирического значения критерия отражены в таблице 13.2

Таблица 13.2

Данные для расчёта критерия

№№ испытуемых	Группа 1		Группа 2		Группа 4		Группа 3
	Техбюро №1		Техбюро №2		Техбюро №4		Техбюро №3
	Значения	S_i	Значения	S_i	Значения	S_i	Значения
1	2	15	7	10	9	3	8
2	5	15	8	10	9	3	9
3	7	14	9	8	10	2	10
4	8	13	11	6	11	2	12
5	10	12	12	5	12	1	14
Суммы	32	A_1=69	47	A_2=39	51	A_3=11	53
Среднее	6,4	13,8	9,4	7,8	10,2	2,2	10,6

Сумма всех чисел в S_i составит величину A_i, которую нужно будет подставить в формулу для подсчета критерия *S*. (Для крайнего правого столбца S, не указываются, поскольку они равны нулю.)

$$A_i = \sum_1^n S_i\,; \quad A = \sum_1^n A_i \tag{13.3}$$

Необходимо определить максимально возможное значение *A*, которое мы получили бы, если бы все значения справа были больше значений слева. Эта величина называется величиной *B* и вычисляется по формуле (13.2):

$$B = \frac{c(c-1)}{2} n^2 \tag{13.4}$$

В рассматриваемом примере

$$A = 69 + 39 + 11 = 119\,;$$

$$B = \frac{4(4-1)}{2} 5^2 = 150$$

$$S_э = 2 \times 119 - 150 = 88$$

По таблице П11 приложения

$$S_к = \begin{cases} \dfrac{51}{72} \dfrac{(p \le 0{,}05)}{(p \le 0{,}01)} \end{cases}$$

$$S_э < S_K$$

Принимается гипотеза H_0.

13.2 Практические задания

(номер варианта определяется преподавателем)

Количество штрафов за превышение скорости на трассе

Вариант 1

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	22	27	34	21	23
5.04	10	27	19	34	18
6.04	21	26	33	9	18
7.04	16	15	11	22	24
8.04	23	12	16	18	17

Вариант 2

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	21	23	22	24	27
5.04	24	20	19	22	16
6.04	17	19	17	21	20
7.04	24	24	29	25	27
8.04	27	20	23	24	22

Вариант 3

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	25	27	21	25	25
5.04	17	27	19	26	29
6.04	24	25	24	24	21
7.04	21	26	24	20	22
8.04	25	26	26	19	24

Вариант 4

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	29	22	28	24	28
5.04	18	19	27	30	24
6.04	34	22	38	32	33
7.04	33	28	27	23	18
8.04	36	33	19	30	43

Вариант 5

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	12	20	17	14	12
5.04	15	14	15	18	14
6.04	17	14	14	17	15
7.04	17	16	15	15	14
8.04	16	15	15	16	20

Вариант 6

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	17	24	22	25	17
5.04	20	14	15	14	17
6.04	16	18	13	18	22
7.04	18	16	18	12	20
8.04	17	22	25	12	17

Вариант 7

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	37	17	26	19	30
5.04	22	33	25	23	27
6.04	27	20	20	27	19
7.04	34	28	20	14	15
8.04	34	22	32	17	22

Вариант 8

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	36	30	26	26	38
5.04	34	31	38	33	24
6.04	27	20	24	30	38
7.04	24	41	32	28	29
8.04	33	25	31	37	22

Вариант 9

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	14	29	23	19	20
5.04	24	28	19	25	28
6.04	30	18	32	28	23
7.04	16	29	24	24	26
8.04	24	34	24	16	31

Вариант 10

Дата	Москва-Нижний Новгород	Москва-Санкт-Петербург	Ростов н/Д-Краснодар	Волгоград-Самара	Челябинск-Новосибирск
4.04	31	29	31	32	33
5.04	23	33	20	25	29
6.04	27	35	43	29	22
7.04	30	31	33	40	23
8.04	35	24	31	40	29

13.3 Содержание отчёта

Название практической работы, исходные данные, расчёт критерия, заключение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4404	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007									

3,3	0,0005
3,4	0,0003
3,5	0,00023
3,6	0,00016
3,7	0,00011
3,8	0,00007
3,9	0,00005
4,0	0,00003

Таблица П2

Критические значения t-критерия Стьюдента

df	0,10	0,05	0,01	0,001	df	0,10	0,05	0,01	0,001	df	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,314	12,70	63,65	636,61	**31**	1,696	2,040	2,744	3,633	**61**	1,670	2,000	2,659	3,457
2	2,920	4,303	9,925	31,602	**32**	1,694	2,037	2,738	3,622	**62**	1,670	1,999	2,657	3,454
3	2,353	3,182	5,841	12,923	**33**	1,692	2,035	2,733	3,611	**63**	1,669	1,998	2,656	3,452
4	2,132	2,776	4,604	8,610	**34**	1,691	2,032	2,728	3,601	**64**	1,669	1,998	2,655	3,449
5	2,015	2,571	4,032	6,869	**35**	1,690	2,030	2,724	3,591	**65**	1,669	1,997	2,654	3,447
6	1,943	2,447	3,707	5,959	**36**	1,688	2,028	2,719	3,582	**66**	1,668	1,997	2,652	3,444
7	1,895	2,365	3,499	5,408	**37**	1,687	2,026	2,715	3,574	**67**	1,668	1,996	2,651	3,442
8	1,860	2,306	3,355	5,041	**38**	1,686	2,024	2,712	3,566	**68**	1,668	1,995	2,650	3,439
9	1,833	2,262	3,250	4,781	**39**	1,685	2,023	2,708	3,558	**69**	1,667	1,995	2,649	3,437
10	1,812	2,228	3,169	4,587	**40**	1,684	2,021	2,704	3,551	**70**	1,667	1,994	2,648	3,435
11	1,796	2,201	3,106	4,437	**41**	1,683	2,020	2,701	3,544	**71**	1,667	1,994	2,647	3,433
12	1,782	2,179	3,055	4,318	**42**	1,682	2,018	2,698	3,538	**72**	1,666	1,993	2,646	3,431
13	1,771	2,160	3,012	4,221	**43**	1,681	2,017	2,695	3,532	**73**	1,666	1,993	2,645	3,429
14	1,761	2,145	2,977	4,140	**44**	1,680	2,015	2,692	3,526	**74**	1,666	1,993	2,644	3,427
15	1,753	2,131	2,947	4,073	**45**	1,679	2,014	2,690	3,520	**75**	1,665	1,992	2,643	3,425
16	1,746	2,120	2,921	4,015	**46**	1,679	2,013	2,687	3,515	**76**	1,665	1,992	2,642	3,423
17	1,740	2,110	2,898	3,965	**47**	1,678	2,012	2,685	3,510	**78**	1,665	1,991	2,640	3,420
18	1,734	2,101	2,878	3,922	**48**	1,677	2,011	2,682	3,505	**79**	1,664	1,990	2,639	3,418
19	1,729	2,093	2,861	3,883	**49**	1,677	2,010	2,680	3,500	**80**	1,664	1,990	2,639	3,416
20	1,725	2,086	2,845	3,850	**50**	1,676	2,009	2,678	3,496	**90**	1,662	1,987	2,632	3,402
21	1,721	2,080	2,831	3,819	**51**	1,675	2,008	2,676	3,492	**100**	1,660	1,984	2,626	3,390
22	1,717	2,074	2,819	3,792	**52**	1,675	2,007	2,674	3,488	**110**	1,659	1,982	2,621	3,381
23	1,714	2,069	2,807	3,768	**53**	1,674	2,006	2,672	3,484	**120**	1,658	1,980	2,617	3,373
24	1,711	2,064	2,797	3,745	**54**	1,674	2,005	2,670	3,480	**130**	1,657	1,978	2,614	3,367
25	1,708	2,060	2,787	3,725	**55**	1,673	2,004	2,668	3,476	**140**	1,656	1,977	2,611	3,361
26	1,706	2,056	2,779	3,707	**56**	1,673	2,003	2,667	3,473	**150**	1,655	1,976	2,609	3,357
27	1,703	2,052	2,771	3,690	**57**	1,672	2,002	2,665	3,470	**200**	1,653	1,972	2,601	3,340
28	1,701	2,049	2,763	3,674	**58**	1,672	2,002	2,663	3,466	**250**	1,651	1,969	2,596	3,330
29	1,699	2,045	2,756	3,659	**59**	1,671	2,001	2,662	3,463	**300**	1,650	1,968	2,592	3,323
30	1,697	2,042	2,750	3,646	**60**	1,671	2,000	2,660	3,460	**350**	1,649	1,967	2,590	3,319

Таблица П3

Критические значения критерия Фишера

	Степени свободы для числителя											
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	24	?
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,785	8,745	8,638	8,527
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,735	4,678	4,527	4,366
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,637	3,575	3,410	3,231
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	2,978	2,913	2,737	2,539
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,854	2,788	2,609	2,406
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,753	2,687	2,505	2,297
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,671	2,604	2,420	2,208
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,602	2,534	2,349	2,132
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,544	2,475	2,288	2,067
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,494	2,425	2,235	2,011
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,412	2,342	2,150	1,918
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,348	2,278	2,082	1,844
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,165	2,092	1,887	1,624
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,077	2,003	1,793	1,511
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,026	1,952	1,737	1,440
70	3,978	3,128	2,736	2,503	2,346	2,231	2,143	2,074	1,969	1,893	1,674	1,355
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,103	2,032	1,927	1,850	1,627	1,286
200	3,888	3,041	2,650	2,417	2,259	2,144	2,056	1,985	1,878	1,801	1,572	1,192
oo	3,843	2,998	2,607	2,374	2,216	2,100	2,011	1,940	1,833	1,754	1,519	

Таблица П4

Критические значения критерия Колмогорова-Смирнова

n	d_{max}		n	D_{max}	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$		$P = 0,05$	$P = 0,01$
5	0 6074	0 7279	60	0 1921	0 2302
10	0 4295	0 5147	60	0 1753	0 2101
15	0 3507	0 4202	70	0 1623	0 1945
20	0 3037	0 3639	80	0 1518	0 1820
25	0 2716	0 3255	90	0 1432	
30	0 2480	0 2972	100	0 1358	
40	0 2147	0 2574	$n > 100$	1 36/ $\sqrt{n}$	1 63/ $\sqrt{n}$

Таблица П5

Критические значения критерия Знаков

№п/п	n	p=0,05	p=0,01
1	5	0	—
2	6	0	—
3	7	0	0
4	8	1	0
5	9	1	0
6	10	1	0
7	11	2	1
8	12	**2**	1
9	13	3	1
10	14	3	2
11	15	3	2
12	16	4	2
13	17	4	3
14	18	5	3
15	19	5	4
16	20	5	4
17	21	6	4
18	22	6	5
19	23	7	5
20	24	7	5

Таблица П6

Критические значения критерия Вилкоксана

n	Уровень значимости для одностороннего критерия				*n*	Уровень значимости для одностороннего критерия			
	0,05	0,025	0,01	0,005		0,05	0,025	0,01	0,005
	Уровень значимости для двустороннего критерия					Уровень значимости для двустороннего критерия			
	0,10	0,05	0,02	0,01		0,10	0,05	0,02	0,01
5	0				28	130	116	101	91
6	2	0	—	—	29	140	126	ПО	100
7	3	2	0	—	30	153	137	120	109
8	5	3	1	0	31	163	147	130	118
9	8	5	3	1	32	175	159	140	128
10	10	8	5	3	33	187	170	151	138
11	13	10	7	5	34	200	182	162	148
12	17	13	9	7	35	213	195	173	159
13	21	17	12	9	36	227	208	185	171
14	25	21	15	12	37	241	221	198	182
15	30	25	19	15	38	256	235	211	194
16	35	29	23	19	39	271	249	224	207
17	41	34	27	23	40	286	264	238	220
18	47	40	32	27	41	302	279	252	233
19	53	46	37	32	42	319	294	266	247
20	60	52	43	37	43	336	310	281	261
21	67	58	49	42	44	353	327	296	276
22	75	65	55	48	45	371	343	312	291
23	83	73	62	54	46	389	361	328	307
24	91	81	69	61	47	407	378	345	322
25	100	89	76	68	48	426	396	362	339
26	ПО	98	84	75	49	446	415	379	355
27	119	107	92	83	50	466	434	397	373

Таблица П7

Критические значения критерия U Манна-Уитни
(для проверки ненаправленных альтернатив) *P=0,05*

N_2	N_1													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	I	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Таблица П8

Критические области для *хи-квадрат* распределения

k-1	α				
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818

Таблица П9

Критические значения коэффициентов корреляции Спирмена

Критические значения коэффициентов корреляции r-Спирмена

n	0,10	0,05	0,01	0,001	n	0,10	0,05	0,01	0,001	n	0,10	0,05	0,01	0,001
5	0,805	0,878	0,959	0,991	33	0,291	0,344	0,442	0,547	61	0,213	0,252	0,327	0,411
6	0,729	0,811	0,917	0,974	34	0,287	0,339	0,436	0,539	62	0,211	0,250	0,325	0,408
7	0,669	0,754	0,875	0,951	35	0,283	0,334	0,430	0,532	63	0,209	0,248	0,322	0,405
8	0,621	0,707	0,834	0,925	36	0,279	0,329	0,424	0,525	64	0,207	0,246	0,320	0,402
9	0,582	0,666	0,798	0,898	37	0,275	0,325	0,418	0,519	65	0,206	0,244	0,317	0,399
10	0,549	0,632	0,765	0,872	38	0,271	0,320	0,413	0,513	66	0,204	0,242	0,315	0,396
11	0,521	0,602	0,735	0,847	39	0,267	0,316	0,408	0,507	67	0,203	0,240	0,313	0,393
12	0,497	0,576	0,708	0,823	40	0,264	0,312	0,403	0,501	68	0,201	0,239	0,310	0,390
13	0,476	0,553	0,684	0,801	4!	0,260	0,308	0,398	0,495	69	0,200	0,237	0,308	0,388
14	0,458	0,532	0,661	0,780	42	0,257	0,304	0,393	0,490	70	0,198	0,235	0,306	0,385
15	0,441	0,514	0,641	0,760	43	0,254	0,301	0,389	0,484	80	0,185	0,220	0,286	0,361
16	0,426	0,497	0,623	0,742	44	0,251	0,297	0,384	0,479	90	0,174	0,207	0,270	0,341
17	0,412	0,482	0,606	0,725	45	0,248	0,294	0,380	0,474	100	0,165	0,197	0,256	0,324
18	0,400	0,468	0,590	0,708	46	0,246	0,291	0,376	0,469	110	0,158	0,187	0,245	0,310
19	0,389	0,456	0,575	0,693	47	0,243	0,288	0,372	0,465	120	0,151	0,179	0,234	0,297
20	0,378	0,444	0,561	0,679	48	0,240	0,285	0,368	0,460	130	0,145	0,172	0,225	0,285
21	0,369	0,433	0,549	0,665	49	0,238	0,282	0,365	0,456	140	0,140	0,166	0,217	0,275
22	0,360	0,423	0,537	0,652	50	0,235	0,279	0,361	0,451	150	0,135	0,160	0,210	0,266
23	0,352	0,413	0,526	0,640	51	0,233	0,276	0,358	0,447	200	0,117	0,139	0,182	0,231
24	0,344	0,404	0,515	0,629	52	0,231	0,273	0,354	0,443	250	0,104	0,124	0,163	0,207
25	0,337	0,396	0,505	0,618	53	0,228	0,271	0,351	0,439	300	0,095	0,113	0,149	0,189
26	0,330	0,388	0,496	0,607	54	0,226	0,268	0,348	0,435	350	0,088	0,105	0,138	0,175
27	0,323	0,381	0,487	0,597	55	0,224	0,266	0,345	0,432	400	0,082	0,098	0,129	0,164
28	0,317	0,374	0,479	0,588	56	0,222	0,263	0,341	0,428	450	0,078	0,092	0,121	0,155
29	0,311	0,367	0,471	0,579	57	0,220	0,261	0,339	0,424	500	0,074	0,088	0,115	0,147
30	0,306	0,361	0,463	0,570	58	0,218	0,259	0,336	0,421	600	0,067	0,080	0,105	0,134
31	0,301	0,355	0,456	0,562	59	0,216	0,256	0,333	0,418					
32	0,296	0,349	0,449	0,554	60	0,214	0,254	0,330	0,414					

Таблица П10

Критические значения Q-критерия Розенбаума

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
								p=0,05								
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
								p=0,01								
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

Таблица П11

Критические значения критерия тенденций *S*-Джонкира для количества групп от трёх до шести ($3 \le c \le 6$) и количества испытуемых в каждой группе от двух до десяти ($2 \le n \le 10$)

c	N								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
					p = 0,05				
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	256
					p = 0,01				
3	–	25	32	45	99	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

ЛИТЕРАТУРА

1 Елисеева И.И. Статистика: Учебник для академических бакалавров – М.: издательство «Юрайт», 2014

2 Куланчёв А.П Методы и средства комплексного статистического анализа данных – М.: издательство ИНФРА-М 2017

3 Орлов А.И. Прикладная статистика. Учебник – М.: издательство «Экзамен»,2004

4 Боровков А.п. Математическая статистика –М.: издательство «Наука», 1984

5 Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. – СПб.: издательство «Речь», 2004